

ALCUNI ESERCIZI SULL'FPTAS PER PROBLEMA DELLO ZAINO

CORSO DI RICERCA OPERATIVA 2

ESERCIZIO 1. Per ognuna delle seguenti istanze del problema dello zaino, determinare una soluzione approssimata data dal FPTAS eseguito con $t = 1$. Stimare l'errore relativo massimo garantito dall'algoritmo.

$$(a) \quad \begin{aligned} v_1, \dots, v_5 &= 56, 98, 60, 52, 96; \\ p_1, \dots, p_5 &= 28, 71, 88, 6, 64; \\ b &= 128. \end{aligned}$$

$$(b) \quad \begin{aligned} v_1, \dots, v_5 &= 91, 6, 84, 7, 65; \\ p_1, \dots, p_5 &= 28, 4, 34, 27, 10; \\ b &= 51. \end{aligned}$$

$$(c) \quad \begin{aligned} v_1, \dots, v_5 &= 80, 26, 81, 61, 22 \\ p_1, \dots, p_5 &= 67, 2, 71, 13, 21 \\ b &= 87. \end{aligned}$$

$$(d) \quad \begin{aligned} v_1, \dots, v_5 &= 82, 48, 5, 95, 43 \\ p_1, \dots, p_5 &= 49, 83, 2, 89, 86; \\ b &= 154. \end{aligned}$$

SOLUZIONI

1. (a) Si considera il problema modificato con profitti

$$\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_5 = 50, 90, 60, 50, 90.$$

Partendo dallo stato iniziale ($\bar{v} = 0, N = \emptyset$), si enumerano gli insiemi $M_1, \dots, M_5$ come segue. L'insieme M_1 è descritto dall'insieme di stati

	$\bar{v}(N)$	$p(N)$	N
$M_1 :$	0	0	$\emptyset$
	50	28	$\{1\}$

dove per comodità è riportato anche il peso $p(N)$. Da tali stati si può ottenere, considerando l'oggetto 2:

$$\begin{aligned} (0, 0, \emptyset) &\rightarrow (90, 71, \{2\}) \\ (50, 28, \{1\}) &\rightarrow (140, 99, \{1, 2\}) \end{aligned}$$

e quindi il corrispondente

	$\bar{v}(N)$	$p(N)$	N
$M_2 :$	0	0	$\emptyset$
	50	28	$\{1\}$
	90	71	$\{2\}$
	140	99	$\{1, 2\}$

Dagli stati di M_2 si ottengono, considerando l'oggetto 3:

$$\begin{aligned} (0, 0, \emptyset) &\rightarrow (60, 88, \{3\}) \\ (50, 28, \{1\}) &\rightarrow (110, 116, \{1, 3\}) \end{aligned}$$

e quindi

	$\bar{v}(N)$	$p(N)$	N
$M_3 :$	0	0	$\emptyset$
	50	28	$\{1\}$
	60	88	$\{3\}$
	90	71	$\{2\}$
	110	116	$\{1, 3\}$
	140	99	$\{1, 2\}$

Lavorando sugli stati di M_3 si calcola

$$\begin{aligned} (0, 0, \emptyset) &\rightarrow (50, 6, \{4\}) \\ (50, 28, \{1\}) &\rightarrow (100, 34, \{1, 4\}) \\ (60, 88, \{3\}) &\rightarrow (110, 94, \{3, 4\}) \\ (90, 71, \{2\}) &\rightarrow (140, 77, \{2, 4\}) \\ (110, 116, \{1, 3\}) &\rightarrow (160, 122, \{1, 3, 4\}) \\ (140, 99, \{1, 2\}) &\rightarrow (190, 105, \{1, 2, 4\}) \end{aligned}$$

$\Rightarrow M_4 :$

$\bar{v}(N)$	$p(N)$	N
0	0	$\emptyset$
50	6	$\{4\}$
60	88	$\{3\}$
90	71	$\{2\}$
100	34	$\{1, 4\}$
110	94	$\{3, 4\}$
140	77	$\{2, 4\}$
160	122	$\{1, 3, 4\}$
190	105	$\{1, 2, 4\}$

Infine, per M_5 si ottiene quanto segue.

$$\begin{aligned} (0, 0, \emptyset) &\rightarrow (90, 64, \{5\}) \\ (50, 6, \{4\}) &\rightarrow (140, 70, \{4, 5\}) \\ (100, 34, \{1, 4\}) &\rightarrow (190, 88, \{1, 4, 5\}) \end{aligned} \implies M_5 :$$

$\bar{v}(N)$	$p(N)$	N
0	0	$\emptyset$
50	6	$\{4\}$
60	88	$\{3\}$
90	64	$\{2\}$
100	34	$\{1, 4\}$
110	94	$\{3, 4\}$
140	70	$\{4, 5\}$
160	122	$\{1, 3, 4\}$
190	98	$\{1, 4, 5\}$

L'ottimo approssimato è dato dall'insieme di oggetti $S = \{1, 4, 5\}$, con $v(S) = 204$ ($\bar{v}(S) = 190$); l'ottimo esatto è dato da $S^* = \{1, 2, 4\}$, $v(S^*) = 206$. L'errore relativo massimo garantito è $\varepsilon = \frac{n10^t}{v_{\max}} = \frac{5 \cdot 10}{98} \approx 0.51$.

(b) Ottimo approssimato $S = \{1, 5\}$, con $v(S) = 156$, ottimo esatto $S^* = \{1, 2, 5\}$, $v(S^*) = 162$, errore relativo massimo $\varepsilon \approx 0.55$.

(c) $S = \{1, 2, 4\}$, $v(S) = 167$, con $S^* = \{2, 3, 4\}$, $v(S^*) = 168$, $\varepsilon \approx 0.62$.

(d) $S = \{1, 4\}$, $v(S) = 177$, con $S^* = \{1, 3, 4\}$, $v(S^*) = 182$, $\varepsilon \approx 0.53$.