

Soluzioni compito di Ricerca Operativa II del 03/07/2003

Esercizio 1 (14 punti)

- 1) È sufficiente osservare che il peso complessivo degli oggetti 2 e 3 è inferiore rispetto al peso dell'oggetto 5, mentre il valore complessivo è superiore.
- 2) La soluzione ottima è $N = \{1, 3, 5\}$ con valore ottimo pari a 76.
- 3) a) e b) sono entrambe false: allo stato attuale delle conoscenze non sappiamo se esista o meno un algoritmo polinomiale che risolva il problema dello zaino, l'unica cosa che possiamo dire è che un tale algoritmo non è ancora stato trovato. c) è vera in quanto il problema dello zaino ammette uno schema di approssimazione completamente polinomiale.

Esercizio 2 (14 punti)

- 1) Ricordando che il costo di un taglio è sempre un upper bound per il valore del flusso massimo, gli archi uscenti da S ci dicono che il flusso massimo è *al massimo* pari a 24.
- 2) Il flusso massimo è pari a 22 ed è ottenuto attraverso i seguenti flussi lungo i singoli archi:

$$x_{S1} = 2 \quad x_{S2} = 4 \quad x_{S3} = 16 \quad x_{14} = 1 \quad x_{15} = 1 \quad x_{24} = 1 \quad x_{25} = 3$$

$$x_{35} = 12 \quad x_{36} = 4 \quad x_{4D} = 2 \quad x_{54} = 0 \quad x_{5D} = 16 \quad x_{6D} = 4$$

Il taglio a costo minimo è $U = \{S, 3, 6\}$

- 3) Aggiungendo un arco il flusso massimo non può certamente diminuire. Inoltre anche il valore del taglio a costo minimo non può aumentare. Infatti l'introduzione dell'arco (i, j) con $i \notin U$ e $j \in U$ non aumenta il costo del taglio U . Quindi neppure il flusso massimo (che sappiamo coincidere sempre con il valore del taglio a costo minimo) può aumentare. Ne consegue che il valore del flusso massimo resta invariato.

Esercizio 3 (6 punti)

1) Non ci possono essere soluzioni di base con la proprietà descritta. Infatti in corrispondenza delle soluzioni di base solo i valori delle variabili in base possono essere strettamente positivi e quindi nel nostro caso dovremmo avere in base $x_{11}, x_{12}, x_{21}, x_{22}$ ma tali variabili formano un ciclo nel grafo associato al problema di trasporto mentre abbiamo visto che le variabili di una base non formano cicli nel grafo associato. Ci possono essere invece soluzioni non di base con questa proprietà. Basti pensare ad un caso con due soli depositi e due soli negozi, con i depositi aventi entrambi 2 unità di prodotto e i negozi che richiedono entrambi 2 unità di prodotto. Se i costi di trasporto tra ogni deposito ed ogni negozio sono tutti uguali tra loro la soluzione di inviare un'unità di prodotto da ciascun deposito a ciascun negozio è ottima.

2) a) è ovviamente falsa visto che abbiamo trovato una soluzione ottima del problema. Tra b) e c) notiamo che è vero che la soluzione di base ottima trovata è degenere ma se si crea una nuova base aggiungendo l'arco relativo alla variabile fuori base con coefficiente di costo ridotto nullo (in modo che il valore dell'obiettivo certamente non cambia) si nota che il ciclo ottenuto (orientato secondo questo arco aggiunto) attraversa l'arco relativo all'unica variabile in base nulla nel proprio verso e quindi la soluzione di base relativa alla nuova base sarà diversa rispetto a quella di partenza ma anch'essa ottima. Quindi b) è vera e c) è falsa.

3) Sia

$$1 \rightarrow \dots \rightarrow n \rightarrow \dots \rightarrow 1$$

il circuito ottimo $C_* = (V, A_{C_*})$ con insieme di archi A_{C_*} . Lo spezziamo in due parti, quella che va da 1 a n (contenente gli archi $A_{C_1^*}$) e quella che va da n a 1 (contenente gli archi $A_{C_2^*}$). Si noti che $A_{C_*} = A_{C_1^*} \cup A_{C_2^*}$. In base alla disuguaglianza triangolare possiamo garantire che

$$d_{n1} \leq \sum_{(i,j) \in A_{C_1^*}} d_{ij}$$

$$d_{n1} \leq \sum_{(i,j) \in A_{C_2^*}} d_{ij}$$

Sommando membro a membro si ottiene

$$2d_{n1} \leq \sum_{(i,j) \in A_{C_1^*}} d_{ij} + \sum_{(i,j) \in A_{C_2^*}} d_{ij}$$

Ma

$$\sum_{(i,j) \in A_{C_1^*}} d_{ij} + \sum_{(i,j) \in A_{C_2^*}} d_{ij} = \sum_{(i,j) \in A_{C^*}} d_{ij}$$

cioè la lunghezza del circuito ottimo. Se indichiamo tale lunghezza con $d(C^*)$, abbiamo quindi dimostrato che

$$d_{n1} \leq \frac{1}{2}d(C^*).$$

(Opzionale) Il circuito restituito da DST, indicato nel seguito con $C = (V, A_C)$, in questo caso è formato dagli archi dell'albero di supporto ottimo $T^* = (V, A_{T^*})$ con distanza complessiva pari a

$$d(T^*) = \sum_{(i,j) \in A_{T^*}} d_{ij}$$

e dal singolo arco $(n, 1)$. Tale circuito avrà quindi lunghezza complessiva pari a

$$d(C) = d(T^*) + d_{n1}$$

Ora, per quanto già visto a lezione si ha $d(T^*) \leq d(C^*)$, mentre abbiamo appena dimostrato che $d_{n1} \leq \frac{1}{2}d(C^*)$. Combinando i due risultati otteniamo

$$d(C) = d(T^*) + d_{n1} \leq \frac{3}{2}d(C^*),$$

il che dimostra che in questo caso il circuito restituito da DST è una soluzione 0.5-approssimata del problema di TSP metrico.