

COMPITO DI RICERCA OPERATIVA II

ESERCIZIO 1. (6 punti) Sia data la rete $G = (V, A)$ con $V = \{1, 2, 3, 4\}$ e

$$A = \{(1, 2); (1, 4); (2, 3); (2, 4); (3, 1); (4, 3)\}$$

con costi di trasporto unitari pari a:

$$c_{12} = 5 \quad c_{14} = 5 \quad c_{23} = 8 \quad c_{24} = 2 \quad c_{31} = 4 \quad c_{43} = 4,$$

e capacità degli archi pari a:

$$d_{12} = 3 \quad d_{14} = 3 \quad d_{23} = 4 \quad d_{24} = 2 \quad d_{31} = 1 \quad d_{43} = 4$$

e bilanci

$$b_1 = 5, b_2 = 0, b_3 = -5, b_4 = 0.$$

Si consideri la tripla

$$B = \{x_{12}, x_{23}, x_{43}\} \quad N_0 = \{x_{24}\} \quad N_1 = \{x_{14}, x_{31}\}$$

Si dimostri che a questa corrisponde una soluzione di base ammissibile e partendo da essa si risolva il problema di flusso a costo minimo con capacità sugli archi, restituendone soluzione ottima e valore ottimo.

ESERCIZIO 2. (6 punti) Si consideri un problema dello zaino con 5 oggetti aventi pesi:

$$p_1 = 2 \quad p_2 = 3 \quad p_3 = 5 \quad p_4 = 1 \quad p_5 = 4,$$

e valori:

$$v_1 = 2 \quad v_2 = 6 \quad v_3 = 8 \quad v_4 = 1 \quad v_5 = 12,$$

Sia $b = 9$ la capacità dello zaino. Si risolva il problema con la programmazione dinamica restituendo il valore ottimo e *tutte* le soluzioni ottime.

ESERCIZIO 3. (6 punti) Sia dato il problema di assegnamento con la seguente tabella dei costi:

	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5
a_1	2	2	2	2	2
a_2	2	4	2	6	8
a_3	8	2	6	4	10
a_4	10	2	8	10	6
a_5	4	2	8	12	4

Si determini una soluzione ottima e il valore ottimo di questo problema.

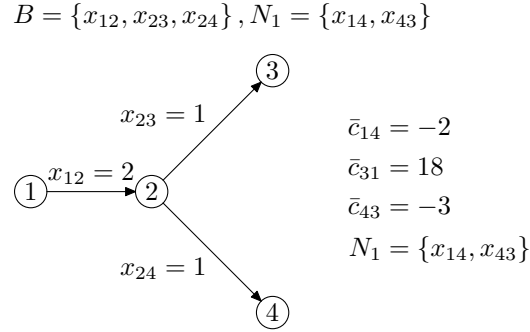
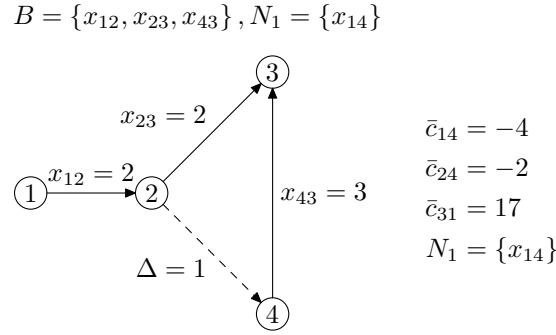
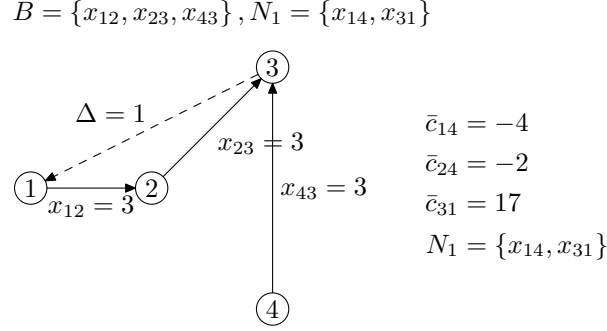
ESERCIZIO 4. (3 punti) In un problema TSP su un grafo completo con $n = 8$ nodi, si consideri il sottinsieme $S(A_0, A_1)$ della regione ammissibile con:

$$A_0 = \{(1, 3); (3, 5)\} \quad A_1 = \{(1, 2); (4, 7); (2, 4)\},$$

per il quale si ha il valore di lower bound $L(S(A_0, A_1)) = 22$. Spiegare perché il valore della variabile x_{71} può essere fissato a 0, ovvero il corrispondente arco può essere trasferito in A_0 .

SOLUZIONI

1. Applicando il semplice su rete (versione con capacità) si ottiene quanto segue.



La soluzione ottima è quindi

$$x_{12} = 2, x_{14} = 3, x_{23} = 1, x_{24} = 1, x_{31} = 0, x_{43} = 4,$$

di costo $5 \cdot 2 + 5 \cdot 3 + 8 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 4 \cdot 0 + 4 \cdot 4 = 51$.

2. Calcolando la funzione di stato $f_k^*(s)$ si ottiene quanto segue.

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$f_k^*(s)$										20
1										20
2	0	1	1	6	12	13	13	18	19	20
3	0	1	1	1	12	13	13	13	13	20
4	0	1	1	1	12	13	13	13	13	13
5	0	0	0	0	12	12	12	12	12	12

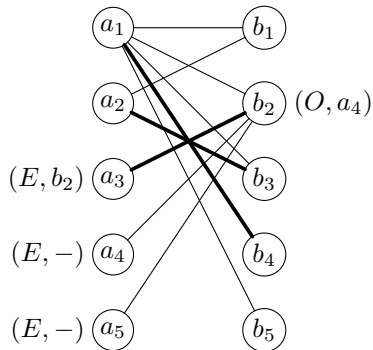
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$d_k^*(s)$										sn
1										sn
2	no	no	no	si	no	no	no	si	si	no
3	no	no	no	no	no	no	no	no	no	si
4	no	si	si	si	no	si	si	si	si	si
5	no	no	no	no	si	si	si	si	si	si

Il simbolo “sn” indica un “punto di scelta” nel quale sia “si” che “no” sono decisioni ottime. Si hanno quindi le due soluzioni ottime

$$\begin{aligned} x_1 = 0, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = 1, \quad x_4 = 0, \quad x_5 = 1; \\ x_1 = 1, \quad x_2 = 1, \quad x_3 = 0, \quad x_4 = 0, \quad x_5 = 1. \end{aligned}$$

3. Riducendo la matrice dei costi si ottiene

	1	2	3	4	5
1	0	0	0	0	0
2	0	2	0	4	6
3	6	0	4	2	8
4	8	0	6	8	4
5	2	0	6	10	2



Applicando la regola di aggiornamento si ottiene la successiva matrice

	1	2	3	4	5
1	0	0	0	0	0
2	0	2	0	4	6
3	6	0	4	2	8
4	8	0	6	8	4
5	2	0	6	10	2

$$\lambda = 2 \\ \Rightarrow$$

	1	2	3	4	5
1	0	2	0	0	0
2	0	4	0	4	6
3	2	0	2	0	6
4	6	0	4	6	2
5	0	0	4	8	0

sulla quale si individua l'assegnamento

$$\Delta = \{(a_1, b_1), (a_2, b_3), (a_3, b_4), (a_4, b_2), (a_5, b_5)\}$$

di costo 14.

4. Per ragioni di ammissibilità: ponendo $A_1 = \{(1, 2), (4, 7), (2, 4), (7, 1)\}$ si avrebbe il sottociclo $(1 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 7 \rightarrow 1)$.