

COMPITO DI RICERCA OPERATIVA II

ESERCIZIO 1. (6 punti) Sia data la rete $G = (V, A)$ con $V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ e

$$A = \{(1, 2); (1, 3); (1, 5); (4, 2); (4, 3); (5, 3); (5, 4)\}$$

con costi di trasporto unitari pari a

$$c_{12} = 4 \quad c_{13} = 3 \quad c_{15} = 1 \quad c_{42} = 1 \quad c_{43} = 3 \quad c_{53} = 1 \quad c_{54} = 1,$$

e bilanci ai nodi

$$b_1 = 4, \quad b_2 = -2, \quad b_3 = -2, \quad b_4 = -2, \quad b_5 = 2.$$

Si consideri la base

$$B = \{x_{12}, x_{15}, x_{53}, x_{54}\}.$$

Si dimostri che a questa corrisponde una soluzione di base ammissibile e partendo da essa si risolva il problema di flusso a costo minimo senza capacità sugli archi restituendo una soluzione ottima e il valore ottimo del problema. Trovare poi la soluzione ottima e il valore ottimo dello stesso problema supponendo però che gli archi abbiano tutti capacità pari a 3.

ESERCIZIO 2. (6 punti) Sia data la rete $G = (V, A)$ con $V = \{S, 1, 2, 3, 4, 5, D\}$ e

$$A = \{(S, 1); (S, 2); (1, 2); (1, 3); (1, 5); (2, 5); (3, 5); (3, D); (4, D); (5, 4); (5, D)\}.$$

Siano date le seguenti capacità degli archi:

(i, j)	$(S, 1)$	$(S, 2)$	$(1, 2)$	$(1, 3)$	$(1, 5)$	$(2, 5)$	$(3, 5)$	$(3, D)$	$(4, D)$	$(5, 4)$	$(5, D)$
c_{ij}	5	4	1	3	2	3	2	1	6	6	5

Si consideri il seguente flusso:

$$x_{S1} = 5 \quad x_{S2} = 2 \quad x_{12} = 1 \quad x_{13} = 2 \quad x_{15} = 2 \quad x_{25} = 3$$

$$x_{35} = 1 \quad x_{3D} = 1 \quad x_{4D} = 5 \quad x_{54} = 5 \quad x_{5D} = 1$$

Dopo aver verificato che si tratta di un flusso ammissibile, partire da questo con l'algoritmo di Ford-Fulkerson con la procedura di etichettatura per determinare una soluzione ottima del problema di flusso massimo. Determinare anche una soluzione ottima del problema di taglio minimo sulla stessa rete.

ESERCIZIO 3. (6 punti) Sia dato il sottinsieme $S(A_0, A_1)$ della regione ammissibile S di un problema TSP, con

$$A_0 = \{(2, 3); (3, 1)\} \quad A_1 = \{(1, 3)\}.$$

Sia data la seguente tabella finale nella risoluzione del problema di assegnamento che fornisce il lower bound $L(S(A_0, A_1)) = 8$ per tale sottinsieme:

	b_1	b_2	b_4	b_5
a_2	0	∞	2	2
a_3	∞	0	4	8
a_4	2	2	∞	0
a_5	2	2	0	∞

con la relativa soluzione ottima del problema di assegnamento:

$$(a_2, b_1) \quad (a_3, b_2) \quad (a_4, b_5) \quad (a_5, b_4).$$

Effettuare il branching di questo sottinsieme secondo la regola vista e calcolare un lower bound per ciascuno dei nodi figli.

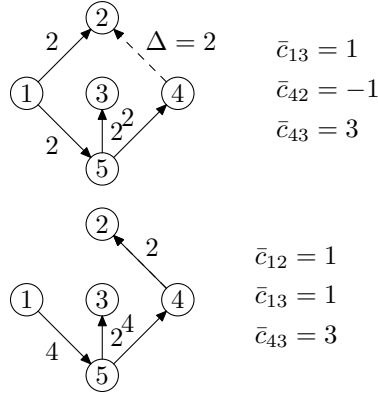
ESERCIZIO 4. (3 punti) Si scriva il rilassamento lagrangiano del problema KNAPSACK

$$\begin{aligned} \max \quad & \sum_{i=1}^n v_i x_i \\ & \sum_{i=1}^n p_i x_i \leq b \\ & x_i \in \{0, 1\} \quad i = 1, \dots, n \end{aligned}$$

ottenuto trasferendo nell'obiettivo l'unico vincolo di $\leq$ presente nel modello e si scriva la soluzione ottima di tale rilassamento al variare del valore $\lambda \geq 0$ per cui tale vincolo viene moltiplicato nell'obiettivo. **OPZIONALE** Scrivere anche, sempre in funzione di λ , il valore ottimo del rilassamento e dire sulla base di esso come risolvereste il problema duale lagrangiano.

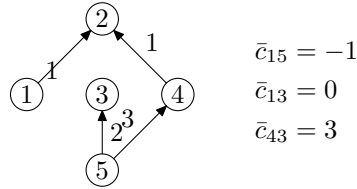
SOLUZIONI

1. La base data è ammissibile. Il simplesso su rete procede come segue.



La soluzione così ottenuta è ottima.

Nel caso di capacità $d_{ij} = 3$ per ogni $(i, j) \in A$, la base di partenza è ancora ammissibile; risulta però $\Delta = 1$ per i vincoli di capacità. Facendo uscire di base la x_{15} (che giunge a saturazione) si ottiene la base $\{x_{12}, x_{42}, x_{53}, x_{54}\}$ con $N_1 = \{x_{15}\}$.



Questa soluzione risulta ottima.

2. La soluzione è ammissibile. Sul grafo ausiliario si ottiene il cammino aumentante $(S, 2, 1, 3, 5, D)$ con $\Delta = 1$. Effettuando la procedura di aggiornamento del flusso si ottiene la soluzione

$$\begin{array}{llllll} x_{S1} = 5, & x_{S2} = 3, & x_{12} = 0, & x_{13} = 3, & x_{15} = 2, & x_{25} = 3, \\ x_{35} = 2, & x_{3D} = 1, & x_{4D} = 5, & x_{54} = 5, & x_{5D} = 2, & \end{array}$$

Sul grafo ausiliario si constata quindi l'ottimalità del nuovo flusso, individuando anche il taglio $U_S = \{S, 2\}$ di capacità $C(U_S) = c_{S1} + c_{25} = 8$.

3. Il rilassamento presenta una soluzione che inuice il sottociclo $\{(4, 5), (5, 4)\}$. Si generano quindi i seguenti nodi.

Nodo 1: $A_0 = \{(2, 3), (3, 1), (4, 5)\}, A_1 = \{(1, 3)\}$

$$\begin{array}{cccc} b_1 & b_2 & b_4 & b_5 \\ a_2 \begin{pmatrix} 0 & \infty & 2 & 2 \end{pmatrix} & \Rightarrow & a_2 \begin{pmatrix} 0 & \infty & 2 & 2 \end{pmatrix} & \Rightarrow & a_2 \begin{pmatrix} 0 & \infty & 2 & \mathbf{0} \end{pmatrix} \\ a_3 \begin{pmatrix} \infty & 0 & 4 & 8 \end{pmatrix} & & a_3 \begin{pmatrix} \infty & 0 & 4 & 8 \end{pmatrix} & & a_3 \begin{pmatrix} \infty & \mathbf{0} & 4 & 6 \end{pmatrix} \\ a_4 \begin{pmatrix} 2 & 2 & \infty & 0 \end{pmatrix} & & a_4 \begin{pmatrix} 2 & 2 & \infty & \infty \end{pmatrix} & & a_4 \begin{pmatrix} \mathbf{0} & 0 & \infty & \infty \end{pmatrix} \\ a_5 \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 & \infty \end{pmatrix} & & a_5 \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 & \infty \end{pmatrix} & & a_5 \begin{pmatrix} 2 & 2 & \mathbf{0} & \infty \end{pmatrix} \end{array}$$

$$LB_1 = 8 + 4 = 12.$$

Nodo 2: $A_0 = \{(2, 3), (3, 1), (5, 4)\}, A_1 = \{(4, 5)\}$

$$\begin{array}{ccc} b_1 & b_2 & b_4 \\ a_2 \begin{pmatrix} 0 & \infty & 2 \end{pmatrix} & \Rightarrow & a_2 \begin{pmatrix} 0 & \infty & \mathbf{0} \end{pmatrix} \\ a_3 \begin{pmatrix} \infty & 0 & 4 \end{pmatrix} & & a_3 \begin{pmatrix} \infty & \mathbf{0} & 2 \end{pmatrix} \\ a_5 \begin{pmatrix} 2 & 2 & \infty \end{pmatrix} & & a_5 \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \infty \end{pmatrix} \end{array}$$

$$LB_2 = 12.$$

4. Il problema rilassato risulta

$$L(\lambda) = \max \left\{ \lambda b + \sum_{i=1}^n (v_i - \lambda p_i) : x_1, \dots, x_n \in \{0, 1\} \right\}, \quad (\lambda \geq 0)$$

con soluzione ottima

$$x_i = \begin{cases} 1 & \text{se } v_i - \lambda p_i > 0, \\ 0 & \text{altrimenti,} \end{cases} \quad i = 1, \dots, n.$$