

COMPITO DI RICERCA OPERATIVA II

ESERCIZIO 1. (7 punti) Sia data la rete $G = (V, A)$ con

$$V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

e

$$A = \{(1, 2), (1, 3), (2, 3), (2, 4), (3, 5), (5, 2), (5, 4)\}$$

con i seguenti costi unitari di trasporto c_{ij} e capacità d_{ij}

arco	(1, 2)	(1, 3)	(2, 3)	(2, 4)	(3, 5)	(5, 2)	(5, 4)
c_{ij}	2	2	5	5	3	7	1
d_{ij}	5	11	7	3	8	3	1

e i seguenti valori b_i associati ai nodi

nodo	1	2	3	4	5
b_i	8	-4	0	-2	-2

Determinare una soluzione ottima e il valore ottimo per questo problema di flusso a costo minimo, partendo dalla base

$$B_0 = \{(1, 2), (1, 3), (2, 4), (3, 5)\}, N_0 = \{(2, 3), (5, 4)\}, N_1 = \{(5, 2)\}.$$

ESERCIZIO 2. (7 punti) Sia dato il problema TSP simmetrico con la seguente tabella delle distanze

	1	2	3	4	5	6
1	—	1	2	9	9	8
2		—	4	4	2	1
3			—	5	9	8
4				—	6	9
5					—	7
6						—

Se ne risolva il duale lagrangiano basato sugli 1-tree utilizzando sempre come nodo a il nodo 1.

ESERCIZIO 3. (7 punti) Sia dato il problema KNAPSACK con capacità dello zaino $b = 8$ e con 5 oggetti aventi i seguenti valori v_i e pesi p_i

i	1	2	3	4	5
v_i	3	8	5	7	12
p_i	1	2	3	3	6

Si determini una soluzione ottima e il valore ottimo di questo problema utilizzando la programmazione dinamica.

ESERCIZIO 4. (4 punti) Si descriva il problema di taglio a costo minimo su una rete e si spieghi la relazione che tale problema ha con quello di flusso massimo sulla stessa rete.

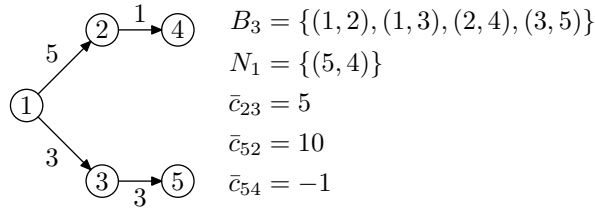
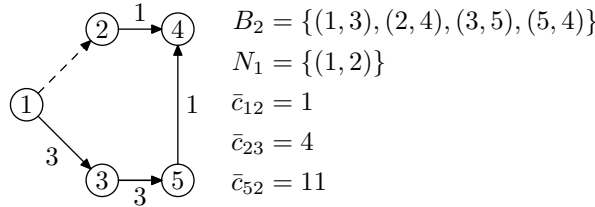
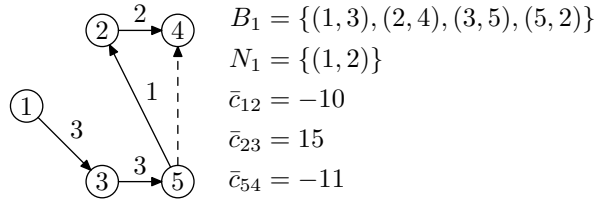
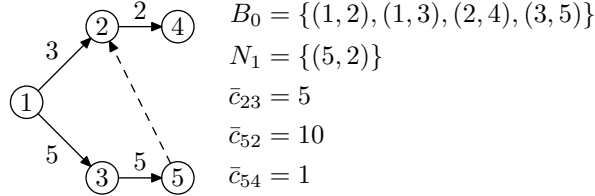
ESERCIZIO 5. (3 punti) Si indichino quali sono le proprietà di un problema TSP metrico. È vero che l'algoritmo Double Spanning Tree restituisce un circuito hamiltoniano solo se tali proprietà sono soddisfatte? (*giustificare la risposta*)

ESERCIZIO 6. (2 punti) Dire se è vero o falso (*giustificando la risposta*) che lo schema di approssimazione completamente polinomiale per il problema KNAPSACK visto a lezione, si basa sulla risoluzione di un problema KNAPSACK modificato con gli stessi valori degli oggetti e la stessa capacità dello zaino del problema originario, ma con diversi pesi degli oggetti.

ESERCIZIO 7. (3 punti) Dato un problema di minimo $\min_{x \in S} f(x)$, definire quali devono essere le proprietà di f' e S' in modo tale che il problema $\min_{x \in S'} f'(x)$ sia un rilassamento del problema di minimo attraverso cui calcolarne un lower bound.

SOLUZIONI

1. La base specificata è ammissibile. Si ottiene quanto segue.



Il costo minimo è $z^* = 31$.

2. Impostando inizialmente $\lambda_1, \dots, \lambda_6 = 0$, si ottiene l'1-albero iniziale

$$T = \{(1, 2), (1, 3), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6)\}, \quad \text{di costo } 14.$$

Hanno grado diverso da 2 i nodi 2 ($\deg(2) = 5$), 4, 5 e 6 (tutti con grado 1). Aggiornando i moltiplicatori si ottiene

$$\lambda_1 = \lambda_3 = 0, \lambda_2 = -3, \lambda_4 = \lambda_5 = \lambda_6 = 1,$$

e quindi i costi modificati $\bar{v}_{ij} = v_{ij} - \lambda_i - \lambda_j$

$$\bar{v}_{ij} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{matrix} & \begin{pmatrix} - & 4 & 2 & 8 & 8 & 7 \\ & - & 7 & 6 & 4 & 3 \\ & & - & 4 & 8 & 7 \\ & & & - & 4 & 7 \\ & & & & - & 5 \\ & & & & & - \end{pmatrix} \end{matrix}$$

con 1-albero di costo minimo

$$T = \{(1, 2), (1, 3), (2, 5), (2, 6), (3, 4), (4, 5)\} \quad \text{di costo } 21.$$

Si noti che il termine $\sum_{i \in V} \lambda_i$ è nullo. Il nodo 2 ha grado 3, mentre il nodo 6 ha grado 1, quindi

$$\lambda_1 = \lambda_3 = 0, \lambda_2 = -4, \lambda_4 = \lambda_5 = 1, \lambda_6 = 2.$$

Sui costi modificati

$$\bar{v}_{ij} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{matrix} & \begin{pmatrix} - & 5 & 2 & 8 & 8 & 6 \\ & - & 8 & 7 & 5 & 3 \\ & & - & 4 & 8 & 6 \\ & & & - & 4 & 6 \\ & & & & - & 4 \\ & & & & & - \end{pmatrix} \end{matrix}$$

si ottiene l'1-albero

$$T = \{(1, 2), (1, 3), (2, 6), (3, 4), (4, 5), (5, 6)\}$$

di costo 22. Poiché tutti i nodi hanno ora grado 2, la procedura non prosegue oltre.

3. Calcolando i valori della $f_k^*(s)$, per $k = 1, \dots, 5$ e $s = 0, \dots, 8$ si ottiene quanto segue.

		s									
		0	1	2	3	4	5	6	7	8	
k	1									20	$f_k^*(s)$
	2	0	0	8	8	8	15	15	15	20	
	3	0	0	0	7	7	7	12	12	12	
	4	0	0	0	7	7	7	12	12	12	
	5	0	0	0	0	0	0	12	12	12	

		s									
		0	1	2	3	4	5	6	7	8	
k	1									N	$d_k^*(s)$
	2	<i>N</i>	<i>N</i>	<i>S</i>	<i>S</i>	<i>S</i>	<i>S</i>	<i>S</i>	<i>S</i>	S	
	3	<i>N</i>	<i>N</i>	<i>N</i>	<i>N</i>	<i>N</i>	<i>N</i>	s/n	s/n	s/n	
	4	<i>N</i>	<i>N</i>	<i>N</i>	<i>S</i>	<i>S</i>	<i>S</i>	N	<i>N</i>	<i>N</i>	
	5	<i>N</i>	<i>N</i>	<i>N</i>	<i>N</i>	<i>N</i>	<i>N</i>	S	<i>S</i>	<i>S</i>	

La soluzione ottima è $x_1^* = 0, x_2^* = 1, x_3^* = 0, x_4^* = 0, x_5^* = 1$, di valore $z^* = 20$. Si noti che per lo stato $(k = 3, s = 6)$ è ottima anche la decisione $d_3^*(6) = S$; questa porta alla soluzione ottima alternativa $x_1^* = 0, x_2^* = 1, x_3^* = 1, x_4^* = 1, x_5^* = 0$.

4. Si vedano gli appunti del corso.

5. Nel TSP metrico valgono:

$$d_{ij} = d_{ji} \quad \text{per ogni } i, j \in V; \quad (1)$$

$$d_{ij} \geq 0 \quad \text{per ogni } i, j \in V; \quad (2)$$

$$d_{ij} + d_{jk} \geq d_{ik} \quad \text{per ogni } i, j, k \in V. \quad (3)$$

Se la matrice d_{ij} è completa, l'algoritmo double spanning tree è comunque in grado di generare un circuito hamiltoniano; ciò che si perde è la garanzia sull'errore relativo massimo. Se la matrice d_{ij} non è completa — cioè esistono $d_{ij} = \infty$ fuori diagonale — non è detto che il double spanning tree garantisca di trovare un circuito hamiltoniano. Si noti che nel caso metrico la (3) garantisce che se l'istanza ammette soluzioni ammissibili, la matrice d_{ij} è completa.

6. Falso. Per costruzione, M_n contiene la soluzione ottima per il knapsack con gli oggetti $1, \dots, n$, con pesi $p_1, \dots, p_n$ e capacità b pari agli originali e valori modificati $v_i = \lfloor \frac{v_i}{10^t} \rfloor 10^t$.

7. Deve valere:

$$S \subseteq S' \quad \text{e} \quad f'(x) \leq f(x) \quad \text{per ogni } x \in S.$$