

COMPITO DI RICERCA OPERATIVA II

ESERCIZIO 1. (7 punti) Sia data la rete $G = (V, A)$ con

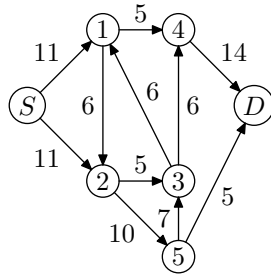
$$V = \{S, 1, 2, 3, 4, 5, D\}$$

e

$$A = \{(S, 1), (S, 2), (1, 2), (1, 4), (2, 3), (2, 5), (3, 1), (3, 4), (4, D), (5, 3), (5, D)\}$$

con le capacità

$$c_{S1} = 11 \quad c_{S2} = 11 \quad c_{12} = 6 \quad c_{14} = 5 \quad c_{23} = 5 \quad c_{25} = 10 \quad c_{31} = 6 \quad c_{34} = 6 \quad c_{4D} = 14 \quad c_{53} = 7 \quad c_{5D} = 5.$$



Supponendo di partire dal flusso ammissibile iniziale

$$x_{S1} = 2 \quad x_{S2} = 10 \quad x_{12} = 0 \quad x_{14} = 5 \quad x_{23} = 5 \quad x_{25} = 5 \quad x_{31} = 3 \quad x_{34} = 2 \quad x_{4D} = 7 \quad x_{53} = 0 \quad x_{5D} = 5,$$

si determini il flusso massimo e il taglio minimo per questa rete.

ESERCIZIO 2. (7 punti) Sia dato il problema KNAPSACK con capacità dello zaino $b = 26$ e con 5 oggetti aventi i seguenti valori v_i e pesi p_i

i	1	2	3	4	5
v_i	14	14	21	29	16
p_i	8	7	10	15	9

Si determini una soluzione ottima e il valore ottimo di questo problema utilizzando l'algoritmo branch-and-bound.

ESERCIZIO 3. (7 punti) Sia dato il problema di assegnamento con la seguente tabella dei costi

	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5
a_1	3	3	2	4	2
a_2	8	7	3	9	8
a_3	7	9	3	11	7
a_4	3	3	2	4	2
a_5	10	9	3	9	5

Si determini una soluzione ottima e il valore ottimo di questo problema.

ESERCIZIO 4. (4 punti) Si dia la definizione di 1-tree su un grafo non orientato $G = (V, A)$; si descriva il problema dello 1-tree minimo su tale grafo e si spieghi perchè tale problema è un rilassamento del problema TSP simmetrico sullo stesso grafo. Si indichi infine una procedura di risoluzione per il problema dello 1-tree minimo.

ESERCIZIO 5. (3 punti) Dato un generico algoritmo branch-and-bound per un problema di massimo $\max_{x \in S} f(x)$, si dia la definizione di upper bound per un certo sottinsieme $T \subseteq S$, la definizione di lower bound e, infine, si enunci la condizione di cancellazione del sottinsieme T dandone una giustificazione.

ESERCIZIO 6. (2 punti) Dire se è vero o falso (*giustificando la risposta*) che gli unici problemi di PLI

$$\begin{array}{ll}\max & \mathbf{c}\mathbf{x} \\ & \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \quad \mathbf{x} \in \mathbb{Z}^n\end{array}$$

risolvibili in tempo polinomiale sono quelli in cui $\mathbf{A}$ è totalmente unimodulare e $\mathbf{b}$ è a coordinate intere.

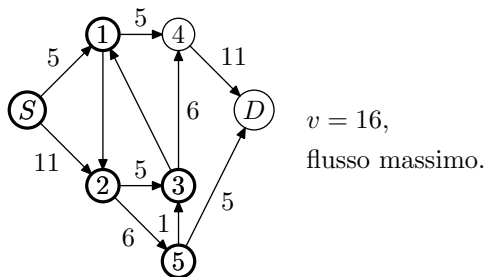
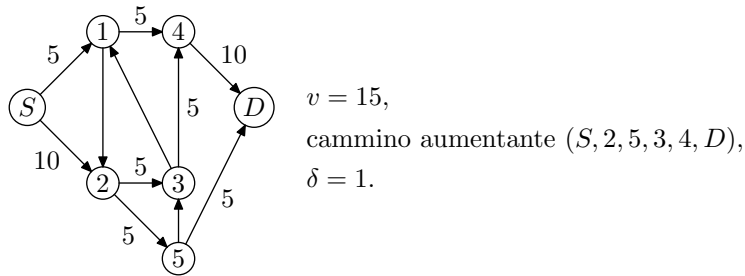
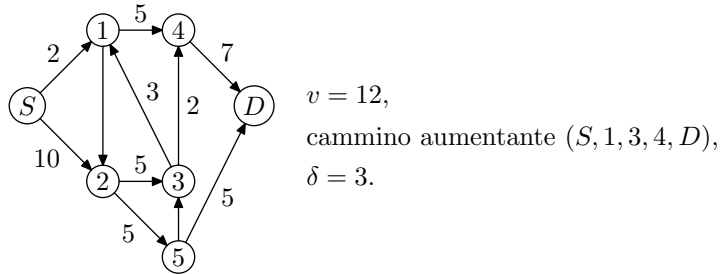
ESERCIZIO 7. (3 punti) Sia dato un problema KNAPSACK con n oggetti e pesi e valori *interi* degli oggetti rispettivamente v_i e p_i , $i = 1, \dots, n$. Si consideri la soluzione ottima del rilassamento lineare con valori delle variabili $x_1 = \dots = x_r = 1$, $x_{r+2} = \dots = x_n = 0$ e x_{r+1} unica variabile con valore frazionario. Si supponga che

$$b - \sum_{i=1}^r p_i < \frac{p_{r+1}}{v_{r+1}}.$$

Si spieghi perchè in tal caso il valore ottimo del problema KNAPSACK è $\sum_{i=1}^r v_i$.

SOLUZIONI

1. La soluzione iniziale data corrisponde ad un flusso di valore $v = 12$.

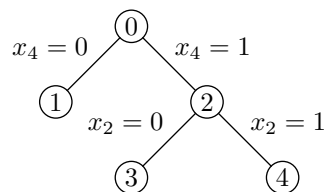


Il taglio di capacità minima è determinato dai nodi $U = \{S, 1, 2, 3, 5\} \implies \mathcal{S}_U = \{(1, 4), (3, 4), (5, D)\}$; quindi

$$c(\mathcal{S}_U = c_{14} + c_{34} + c_{5D} = 5 + 6 + 5 = 16.$$

2. La lista di oggetti ordinata per valori non crescenti di $\frac{v_i}{p_i}$ è la seguente.

i	3	2	4	5	1
v_i	21	14	29	16	14
p_i	10	7	15	9	7



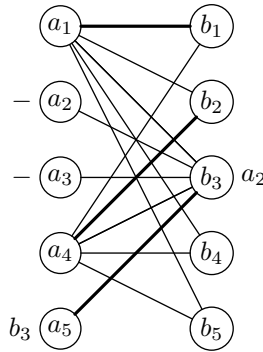
L'albero di branch risultante è riportato in figura. Ai nodi esplorati si ottiene quanto segue. Gli upper bound sono arrotondati all'intero inferiore.

Nodo 0:	$UB_0 = 51, x_2 = x_3 = 1, x_4 = 0.6;$ $LB_0 = 35 \Rightarrow LB = 35.$
Nodo 1:	$UB_1 = 51, x_2 = x_3 = x_5 = 1$ $LB_1 = 51 \Rightarrow LB = 51;$ nodo chiuso.
Nodo 2:	$UB_2 = 52, x_4 = x_3 = 1, x_2 = 0.143$ $LB_2 = 50.$
Nodo 3:	$UB_3 = 51 \leq LB, x_4 = x_3 = 1, x_5 = 0.111$ nodo chiuso.
Nodo 4:	$UB_4 = 51 \leq LB, x_4 = x_2 = 1, x_3 = 0.4$ nodo chiuso.

La soluzione ottima è $x_2^* = x_3^* = x_5^* = 1, x_1^* = x_4^* = 0$, di valore $z^* = 51$.

3. Effettuando la riduzione prima per colonne e poi per righe, si ottiene la matrice ridotta

	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5
a_1	0	0	0	0	0
a_2	4	3	0	4	5
a_3	3	5	0	6	4
a_4	0	0	0	0	0
a_5	6	5	0	4	2



e quindi

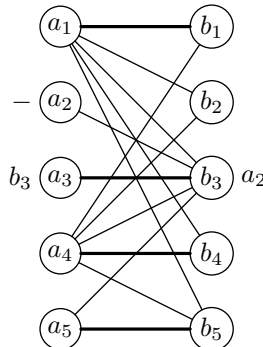
	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5
a_1	0	0	0	0	0
a_2	4	3	0	4	5
a_3	3	5	0	6	4
a_4	0	0	0	0	0
a_5	6	5	0	4	2

$\lambda = 2 \Rightarrow$

	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5
a_1	0	0	2	0	0
a_2	2	1	0	2	3
a_3	1	3	0	4	2
a_4	0	0	2	0	0
a_5	4	3	0	2	0

Si prosegue quindi come segue.

	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5
a_1	0	0	2	0	0
a_2	2	1	0	2	3
a_3	1	3	0	4	2
a_4	0	0	2	0	0
a_5	4	3	0	2	0



$$\begin{array}{c|ccccc} & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 \\ \hline a_1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ a_2 & 2 & 1 & 0 & 2 & 3 \\ a_3 & 1 & 3 & 0 & 4 & 2 \\ a_4 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ a_5 & 4 & 3 & 0 & 2 & 0 \end{array} ; \lambda = 1 \implies \begin{array}{c|ccccc} & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 \\ \hline a_1 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ a_2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ a_3 & 0 & 2 & 0 & 3 & 1 \\ a_4 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ a_5 & 4 & 3 & 1 & 2 & 0 \end{array}$$

Su quest'ultima matrice si trova immediatamente l'accoppiamento completo $\{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5)\}$ di costo 22.

4. Si faccia riferimento agli appunti del corso.
5. Si faccia riferimento agli appunti del corso.
6. Il problema $\max \{ \mathbf{c}\mathbf{x} : \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}, \mathbf{x} \in \mathbb{Z}^n \}$ è sicuramente risolubile in tempo polinomiale se $\mathbf{A}$ è totalmente unimodulare e $\mathbf{b}$ ha componenti tutte intere. Tuttavia non sono solo questi i problemi di PLI risolvibili in tempo polinomiale; si tratta di una condizione sufficiente ma non necessaria.
7. Qui si assume $\frac{v_1}{p_1} \leq \frac{v_2}{p_2} \leq \dots \leq \frac{v_n}{p_n}$. Calcolando l'upper bound e ricordando che i valori sono interi, si ottiene che il valore ottimo z^* soddisfa

$$\begin{aligned} z^* &\leq \sum_{i=1}^r v_i + \left\lfloor \left(b - \sum_{i=1}^r p_i \right) \cdot \frac{v_{r+1}}{p_{r+1}} \right\rfloor = \\ &= \sum_{i=1}^r v_i + \left\lfloor \frac{\left(b - \sum_{i=1}^r p_i \right) \frac{p_{r+1}}{v_{r+1}}}{\frac{p_{r+1}}{v_{r+1}}} \right\rfloor = \\ &= \sum_{i=1}^r v_i. \end{aligned}$$

Inoltre $x_1 = \dots = x_r = 1, x_{r+1} = \dots = x_n = 0$ è una soluzione ammissibile di valore $\sum_{i=1}^r v_i$ e peso $\sum_{i=1}^r p_i < b$, e questo prova l'ottimalità.