

COMPITO DI RICERCA OPERATIVA II

ESERCIZIO 1. (7 punti) Sia data la rete $G = (V, A)$ con

$$V = \{S, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, D\}$$

e

$A = \{(S, 1), (S, 2), (S, 3), (1, 4), (1, 5), (2, 4), (3, 5), (3, 6), (4, 7), (5, 6), (5, 7), (5, D), (6, D), (7, D)\}$
con le capacità

$$\begin{aligned} c_{S1} = 9 \quad c_{S2} = 7 \quad c_{S3} = 8 \quad c_{14} = 5 \quad c_{15} = 2 \quad c_{24} = 1 \\ c_{35} = 2 \quad c_{36} = 8 \quad c_{47} = 3 \quad c_{56} = 2 \quad c_{57} = 2 \quad c_{5D} = 8 \quad c_{6D} = 2 \quad c_{7D} = 3. \end{aligned}$$

Supponendo di partire dal flusso ammissibile iniziale

$$\begin{aligned} x_{S1} = 2 \quad x_{S2} = 0 \quad x_{S3} = 2 \quad x_{14} = 0 \quad x_{15} = 2 \quad x_{24} = 0 \\ x_{35} = 2 \quad x_{36} = 0 \quad x_{47} = 0 \quad x_{56} = 2 \quad x_{57} = 2 \quad x_{5D} = 0 \quad x_{6D} = 2 \quad x_{7D} = 2. \end{aligned}$$

si determini il flusso massimo e il taglio minimo per questa rete.

ESERCIZIO 2. (7 punti) Sia dato il problema KNAPSACK con capacità dello zaino $b = 9$ e con 5 oggetti aventi i seguenti valori v_i e pesi p_i

i	1	2	3	4	5
v_i	583	692	325	100	908
p_i	2	3	4	5	6

Si determinino tutte le soluzioni ottime di questo problema utilizzando l'algoritmo di programmazione dinamica.

ESERCIZIO 3. (7 punti) Sia dato il problema TSP con la seguente tabella delle distanze

	1	2	3	4	5
1	—	8	7	9	3
2	5	—	4	3	2
3	7	9	—	6	6
4	11	12	3	—	6
5	6	14	9	7	—

Si consideri il sottinsieme della regione ammissibile $S(A_0, A_1)$ con

$$A_0 = \emptyset \quad A_1 = \{(1, 2), (5, 1)\}.$$

Si calcoli un lower bound per tale sottinsieme; sulla base del risultato ottenuto si effettui il branching del sottinsieme stesso; si calcoli il lower bound anche per i nodi figli, individuando eventuali circuiti hamiltoniani.

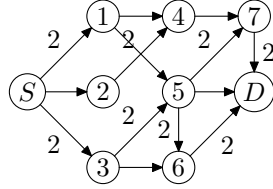
ESERCIZIO 4. (4 punti) Si spieghi in cosa consiste il principio di ottimalità nella programmazione dinamica e si dica perché esso vale nel caso del problema KNAPSACK.

ESERCIZIO 5. (5 punti) Si definisca il problema di ε -approssimazione per problemi di minimo e si definiscano le quattro categorie in cui abbiamo distinto i problemi di ottimizzazione NP-completi sulla base della difficoltà dei corrispondenti problemi di approssimazione.

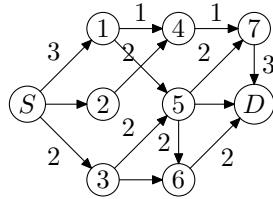
ESERCIZIO 6. (3 punti) Sia dato un problema KNAPSACK con n oggetti aventi pesi $p_1, \dots, p_n$ e valori $v_1, \dots, v_n$. La capacità dello zaino è indicata con b . Si supponga che dati tre oggetti i, j, k , si abbia $p_i + p_j \leq p_k$ e $v_i + v_j > v_k$. Si spieghi perché il vincolo $x_i + x_j \geq x_k$ è certamente soddisfatto da ogni soluzione ottima del problema.

SOLUZIONI

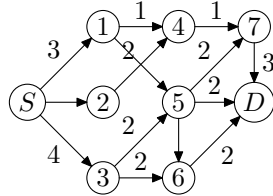
1. Applicando l'algoritmo di Ford-Fulkerson si ottengono i seguenti risultati intermedi.



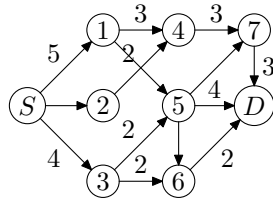
Cammino aumentante: $(S, 1, 4, 7, D)$



Cammino aumentante: $(S, 3, 6, 5, D)$



Cammino aumentante: $(S, 1, 4, 7, 5, D)$



Ottimo (flusso=9).

Un taglio di capacità minima è identificato da

$$U = \{S, 1, 2, 3, 4, 6\}$$

con capacità del taglio

$$C(U) = c_{15} + c_{35} + c_{47} + c_{6D} = 2 + 2 + 3 + 2 = 9.$$

2. Per il problema dato si calcolano le $f_k^*(s)$ e $d_k^*(s)$ come segue.

$k \backslash s$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1										1600
2	0	0	0	692	692	692	908	1017	1017	1600
3	0	0	0	0	325	325	908	908	908	908
4	0	0	0	0	0	100	908	908	908	908
5	0	0	0	0	0	0	908	908	908	908

$k \backslash s$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1										s/n
2	n	n	n	s	s	s	n	s	s	s
3	n	n	n	n	s	s	n	n	n	n
4	n	n	n	n	n	s	n	n	n	n
5	n	n	n	n	n	n	s	s	s	s

Le due soluzioni ottime sono

$$x_2 = x_5 = 1, x_1 = x_3 = x_4 = 0,$$

e

$$x_1 = x_2 = x_3 = 1, x_4 = x_5 = 0,$$

3. Eliminando (riga 1 e colonna 2) e (riga 5 e colonna 1) per tenere conto di A_1 si lavora sulla sottomatrice $\{2, 3, 4\} \times \{3, 4, 5\}$, riducendola:

$$\begin{array}{ccc} & 3 & 4 & 5 \\ \begin{array}{c} 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} & \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ \infty & 6 & 6 \\ 3 & \infty & 6 \end{pmatrix} & \Rightarrow & \begin{array}{ccc} & 3 & 4 & 5 \\ \begin{array}{c} 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \infty & 3 & 4 \\ 0 & \infty & 4 \end{pmatrix} & \Rightarrow & \begin{array}{ccc} & 3 & 4 & 5 \\ \begin{array}{c} 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & \mathbf{0} \\ \infty & \mathbf{0} & 1 \\ \mathbf{0} & \infty & 4 \end{pmatrix} \end{array}$$

La soluzione ottima del corrispondente assegnamento 3×3 , di costo pari a 11, è $M = \{(4, 3), (3, 4), (2, 5)\}$. Il lower bound del sottoinsieme è quindi

$$LB = 8 + 6 + 11 = 25.$$

Il sottociclo $1 \rightarrow 2 \rightarrow 5 \rightarrow 1$ ha il solo arco $(2, 5)$ al di fuori di A_1 , quindi in questo caso avremo un solo nodo figlio

$$\textbf{Nodo: } A_0 = \{(2, 5)\}, A_1 = \{(1, 2), (5, 1)\}.$$

Per tale nodo si lavora sulla sottomatrice

$$\begin{array}{ccc} & 3 & 4 & 5 \\ \begin{array}{c} 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & \infty \\ \infty & 0 & 1 \\ 0 & \infty & 4 \end{pmatrix} & \Rightarrow & \begin{array}{ccc} & 3 & 4 & 5 \\ \begin{array}{c} 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0} & \infty \\ \infty & 0 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \infty & 3 \end{pmatrix} \end{array}$$

L'assegnamento $\{(2, 4), (3, 5), (4, 3)\}$ corrisponde al ciclo completo $\{(1, 2), (2, 4), (4, 3), (3, 5), (5, 1)\}$ di costo 26.

4. Si vedano gli appunti del corso.
 5. Si vedano gli appunti del corso.
 6. Si supponga per assurdo di avere una soluzione ottima x^* nella quale $x_i^* + x_j^* < x_k^*$. Poiché le variabili sono binarie, si deve allora avere $x_i^* = x_j^* = 0$, $x_k^* = 1$; allora la soluzione $\bar{x}$ definita da

$$\bar{x}_r = x_r^* \quad (r \neq i, j, k)$$

$$\bar{x}_k = 0$$

$$\bar{x}_i = \bar{x}_j = 1$$

è ammissibile perché ha peso pari a

$$\sum_{t=1}^n p_t \bar{x}_t = \sum_{t=1}^n p_t x_t^* + (p_i + p_j) - p_k \leq \sum_{t=1}^n p_t x_t^* \leq b.$$

Inoltre $\bar{x}$ ha valore

$$\sum_{t=1}^n v_t \bar{x}_t = \sum_{t=1}^n v_t x_t^* + (v_i + v_j) - v_k > \sum_{t=1}^n v_t x_t^*,$$

contraddicendo l'ottimalità di x^* .