

COMPITO DI RICERCA OPERATIVA II

ESERCIZIO 1. (7 punti) Sia data la rete $G = (V, A)$ con

$$V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

e

$$A = \{(1, 2), (1, 3), (2, 4), (2, 5), (3, 5), (3, 6), (4, 6), (6, 5)\}$$

con i seguenti costi unitari di trasporto c_{ij} e capacità d_{ij}

arco	(1, 2)	(1, 3)	(2, 4)	(2, 5)	(3, 5)	(3, 6)	(4, 6)	(6, 5)
c_{ij}	6	4	2	8	2	9	1	2
d_{ij}	7	8	6	6	3	2	1	2

e i seguenti valori b_i associati ai nodi

nodo	1	2	3	4	5	6
b_i	5	0	0	0	-5	0

Determinare una soluzione ottima e il valore ottimo per questo problema di flusso a costo minimo a partire dalla tripla iniziale

$$B = \{x_{12}, x_{13}, x_{24}, x_{25}, x_{36}\} \quad N_0 = \{x_{35}, x_{46}, x_{65}\} \quad N_1 = \emptyset.$$

ESERCIZIO 2. (7 punti) Sia dato il problema KNAPSACK con capacità dello zaino $b = 12$ e con 5 oggetti aventi i seguenti valori v_i e pesi p_i

i	1	2	3	4	5
v_i	5980	9390	2480	2802	695
p_i	5	10	4	3	1

Lo si risolva utilizzando l'algoritmo branch-and-bound.

ESERCIZIO 3. (7 punti) Si consideri il problema di assegnamento con la seguente tabella dei costi

	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6
a_1	4	2	2	6	9	5
a_2	2	2	2	2	2	2
a_3	4	2	2	7	8	5
a_4	4	2	2	10	11	5
a_5	2	2	2	2	2	2
a_6	4	2	3	7	11	5

Lo si risolva utilizzando l'algoritmo ungherese, restituendo una soluzione ottima e il valore ottimo.

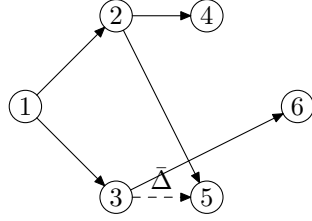
ESERCIZIO 4. (5 punti) Si dimostri che l'algoritmo di Ford-Fulkerson restituisce una soluzione ottima sia per il problema di flusso massimo che per il problema di taglio a costo minimo.

ESERCIZIO 5. (4 punti) Si introducano e si giustifichino i vincoli di eliminazione dei sottocircuiti nel modello matematico del problema TSP asimmetrico.

ESERCIZIO 6. (3 punti) A un problema di flusso massimo classico vengono aggiunti dei vincoli di capacità sui nodi: un nodo intermedio i non può essere attraversato da una quantità di flusso complessiva superiore a t_i . Una volta specificato come si presentano tali vincoli aggiuntivi nel modello matematico, si considerino tali vincoli come difficili e si definisca un rilassamento lagrangiano del problema.

SOLUZIONI

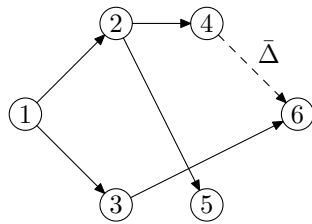
1. Partendo dalla base iniziale si ottiene quanto segue.



$$x_{12} = 5, x_{13} = 0, x_{24} = 0, x_{25} = 5, x_{36} = 0, N_1 = \emptyset$$

$$\bar{c}_{35} = -8, \bar{c}_{46} = -4, \bar{c}_{65} = 1$$

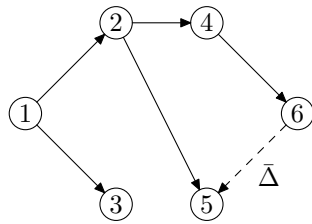
$$\bar{\Delta} = 3$$



$$x_{12} = 2, x_{13} = 3, x_{24} = 0, x_{25} = 2, x_{36} = 0, N_1 = \{x_{35}\}$$

$$\bar{c}_{35} = -8, \bar{c}_{46} = -4, \bar{c}_{65} = 1$$

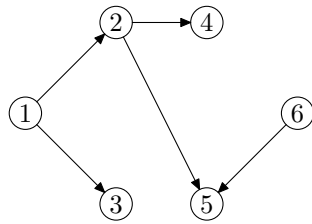
$$\bar{\Delta} = 0$$



$$x_{12} = 2, x_{13} = 3, x_{24} = 0, x_{25} = 2, x_{46} = 0, N_1 = \{x_{35}\}$$

$$\bar{c}_{35} = -8, \bar{c}_{65} = -3, \bar{c}_{36} = 4$$

$$\bar{\Delta} = 1$$



$$x_{12} = 2, x_{13} = 3, x_{24} = 1, x_{25} = 1, x_{65} = 1, N_1 = \{x_{35}, x_{46}\}$$

$$\bar{c}_{35} = -8, \bar{c}_{46} = 3, \bar{c}_{36} = 1$$

$$\bar{\Delta} = 1$$

2. La lista di oggetti ordinata per rapporti decrescenti v_i/p_i è la seguente.

i	1	2	4	5	3
v_i	5980	9390	2802	695	2480
p_i	5	10	3	1	4
$\frac{v_i}{p_i}$	1196	939	934	695	620

Al nodo radice 1 si ottiene

$$UB_1 = 5980 + \left\lfloor \frac{7}{10} \cdot 9390 \right\rfloor = 7171,$$

$$LB_1 = 5980 \implies LB = 5980.$$

Dai branch $x_2 = 1$ e $x_2 = 0$ si ottengono i nodi 2 e 3 rispettivamente. Al nodo 2 si può osservare che $x_2 = 1$ implica necessariamente $x_1 = x_4 = x_3 = 0$, e quindi:

$$UB_2 = LB_2 = 9390 + 695 = 10085 \implies LB = 10085.$$

Al nodo 3 si ottiene

$$UB_3 = 5980 + 2802 + 695 + \left\lfloor \frac{3}{4} \cdot 2480 \right\rfloor = 11337,$$

$$LB_3 = 9477.$$

Effettuando il branch dal nodo 3 con $x_3 = 1$ e $x_3 = 0$ si ottengono i nodi 4 e 5. Al nodo 4 si ottiene

$$UB_4 = LB_4 = 2480 + 5980 + 2802 = 11262 \implies LB = 11262$$

mentre al nodo 5 si ottiene

$$UB_5 = LB_5 = 5980 + 2802 + 695 = 9477 \quad (\text{nodo chiuso}).$$

La soluzione ottima, identificata al nodo 4, è

$$x_1^* = x_4^* = x_5^* = 1, x_2^* = x_3^* = 0.$$

3. Riducendo la matrice per colonne e per righe si ottiene

$$\begin{array}{c} b_1 \quad b_2 \quad b_3 \quad b_4 \quad b_5 \quad b_6 \\ \begin{array}{c} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \end{array} \left(\begin{array}{cccccc} 2 & \emptyset & \emptyset & 4 & 7 & 3 \\ 0 & \emptyset & \emptyset & \emptyset & 0 & 0 \\ 2 & \emptyset & \emptyset & 5 & 6 & 3 \\ 2 & \emptyset & \emptyset & 8 & 9 & 3 \\ 0 & \emptyset & \emptyset & 0 & \emptyset & 0 \\ 2 & \emptyset & \emptyset & 5 & 9 & 3 \end{array} \right) \end{array} \quad \lambda = 2$$

e quindi

$$\begin{array}{c} b_1 \quad b_2 \quad b_3 \quad b_4 \quad b_5 \quad b_6 \\ \begin{array}{c} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \end{array} \left(\begin{array}{cccccc} \emptyset & \emptyset & \emptyset & 2 & 5 & 1 \\ \emptyset & 2 & 2 & \emptyset & 0 & 0 \\ \emptyset & \emptyset & \emptyset & 3 & 4 & 1 \\ \emptyset & \emptyset & \emptyset & 6 & 7 & 1 \\ \emptyset & 2 & 2 & 0 & \emptyset & 0 \\ \emptyset & \emptyset & \emptyset & 3 & 7 & 1 \end{array} \right) \end{array} \quad \lambda = 1$$

$$\begin{array}{c} b_1 \quad b_2 \quad b_3 \quad b_4 \quad b_5 \quad b_6 \\ \begin{array}{c} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \end{array} \left(\begin{array}{cccccc} 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & \emptyset \\ 0 & 3 & 3 & \emptyset & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \emptyset & 2 & 3 & 0 \\ \emptyset & 0 & 0 & 5 & 6 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 0 & \emptyset & 0 \\ 0 & \emptyset & 1 & 2 & 6 & 0 \end{array} \right)$$

Il costo finale dell'assegnamento è $z^* = 17$.

6. Il modello del problema diventa

$$\max \sum_{(S,j) \in A} x_{Sj}$$

soggetto a

$$\sum_{(k,j) \in A} x_{kj} - \sum_{(j,k) \in A} x_{jk} = 0 \quad k \in V \setminus \{S, D\}$$

$$\sum_{(k,j) \in A} x_{jk} \leq t_k \quad k \in V \setminus S, D$$

$$0 \leq x_{ij} \leq c_{ij} \quad (i, j) \in A.$$

Rilassando i vincoli di capacità sui nodi con moltiplicatori $\lambda_k \geq 0$, $k \in V \setminus S, D$ si ottiene il problema rilassato

$$\max \sum_{(S,j) \in A} x_{Sj} + \sum_{k \in V \setminus S, D} \lambda_k \left(t_k - \sum_{j: (k,j) \in A} x_{kj} \right)$$

soggetto a

$$\begin{aligned} \sum_{(k,j) \in A} x_{kj} - \sum_{(j,k) \in A} x_{jk} &= 0 & k \in V \setminus \{S, D\} \\ 0 \leq x_{ij} &\leq c_{ij} & (i, j) \in A. \end{aligned}$$

dove a meno di una costante dipendente solo dai t_k, λ_k la funzione obiettivo è

$$\max \sum_{(S,j) \in A} x_{Sj} + \sum_{k \in V \setminus S, D} \sum_{j: (k,j) \in A} -\lambda_k x_{kj}.$$