

COMPITO DI RICERCA OPERATIVA II

ESERCIZIO 1. (6 punti) Sia data la rete $G = (V, A)$ con $V = \{1, 2, 3, 4\}$ e

$$A = \{(1, 2); (1, 3); (2, 4); (3, 4); (3, 5); (4, 6); (5, 6)\}$$

con costi di trasporto unitari pari a:

$$c_{12} = 11 \quad c_{13} = 3 \quad c_{24} = 5 \quad c_{34} = 8 \quad c_{35} = 10 \quad c_{46} = 6 \quad c_{56} = 7,$$

capacità degli archi pari a:

$$d_{12} = 7 \quad d_{13} = 5 \quad d_{24} = 2 \quad d_{34} = 6 \quad d_{35} = 3 \quad d_{46} = 5 \quad d_{56} = 6$$

e i seguenti valori associati ai nodi:

$$b_1 = 5 \quad b_2 = -1 \quad b_3 = 0 \quad b_4 = -2 \quad b_5 = 4 \quad b_6 = -6$$

Si consideri la tripla

$$B = \{x_{12}, x_{13}, x_{34}, x_{35}, x_{56}\} \quad N_0 = \{x_{46}\} \quad N_1 = \{x_{24}\}$$

Si dimostri che a questa corrisponde una soluzione di base ammissibile e partendo da essa si risolva il problema di flusso a costo minimo con capacità sugli archi, restituendone soluzione ottima e valore ottimo.

ESERCIZIO 2. (6 punti) Si consideri un problema dello zaino con 10 oggetti aventi i seguenti valori e pesi:

Oggetto	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
v_i	27	30	19	32	15	22	29	40	11	33
p_i	8	9	6	11	5	7	10	15	3	12

e capacità $b = 36$. Si consideri il sottinsieme $S(I_0, I_1)$ con:

$$I_0 = \{2, 4\} \quad I_1 = \{1, 9\}.$$

Determinare:

- (1) un upper bound per questo sottinsieme;
- (2) una soluzione ammissibile per il problema KNAPSACK con relativo valore della funzione obiettivo;
- (3) i due nodi figli ottenuti a partire da questo sottinsieme tramite l'operazione di branching

ESERCIZIO 3. (6 punti) Sia dato il problema di assegnamento con la seguente tabella dei costi:

	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5
a_1	10	11	3	12	15
a_2	3	3	3	3	3
a_3	7	9	3	11	9
a_4	11	7	3	12	10
a_5	14	9	3	9	8

Si determini una soluzione ottima e il valore ottimo di questo problema.

ESERCIZIO 4. (3 punti) Un problema di flusso massimo può essere trasformato in uno di flusso a costo minimo con archi a capacità limitata se si aggiunge un arco che va dalla destinazione alla sorgente e se si assegnano opportunamente i valori b_i a tutti i nodi e i valori c_{ij} a tutti gli archi (compreso quello aggiuntivo dalla destinazione alla sorgente). Come scegliereste questi valori per avere l'equivalenza tra i due problemi? (**NB:** per quanto riguarda le capacità, queste rimangono pari a quelle per il problema di flusso massimo per gli archi originali, mentre per l'arco aggiuntivo dal nodo destinazione al nodo sorgente potete porre la capacità pari a $+\infty$).

SOLUZIONI

1. La base $B = \{x_{12}, x_{13}, x_{34}, x_{35}, x_{56}\}$, $N_1 = \{x_{24}\}$ è ammissibile, con flussi e costi ridotti

$$\begin{array}{lll} x_{12} = 3 & & \\ x_{13} = 2 & & \\ x_{34} = 0 & x_{24} = 2 & \bar{c}_{24} = 5 \\ x_{35} = 2 & & \bar{c}_{46} = -3 \\ x_{56} = 6 & & \end{array}$$

Gli archi (2, 4) e (3, 5) violano entrambi le condizioni di ottimalità, si può quindi considerare l'arco saturo (2, 4), che induce il ciclo $(2 \rightarrow 4 \rightarrow 3 \rightarrow 1 \rightarrow 2)$, $\Delta = 2$ e passare alla base

$$B_1 = B = \{x_{12}, x_{13}, x_{34}, x_{35}, x_{56}\}, N_1 = \emptyset.$$

Si ottengono flussi e costi ridotti

$$\begin{array}{lll} x_{12} = 1 & & \\ x_{13} = 4 & & \\ x_{34} = 2 & \bar{c}_{24} = 5 & \\ x_{35} = 2 & \bar{c}_{46} = -3 & \\ x_{56} = 6 & & \end{array}$$

e quindi, facendo entrare in base x_{46} :

$$B_2 = B_1 \setminus \{x_{35}\} \cup \{x_{46}\} = \{x_{12}, x_{13}, x_{34}, x_{56}, x_{46}\}, N_1 = \emptyset.$$

$$\begin{array}{lll} x_{12} = 1 & & \\ x_{13} = 2 & & \\ x_{34} = 4 & \bar{c}_{24} = 5 & \\ x_{46} = 2 & \bar{c}_{46} = 3 & \\ x_{56} = 4 & & \end{array}$$

che corrisponde alla soluzione ottima.

2. Per l'insieme considerato rimangono da esaminare gli oggetti 3,5,6,7,8 e 10, ordinati per rapporti v_i/p_i decrescenti,

Oggetto	3	5	6	7	8	10
v_i	19	15	22	29	40	33
p_i	6	5	7	10	15	12
$\frac{v_i}{p_i}$	3.16	3.00	3.14	2.90	2.67	2.75

 $\Rightarrow$

Oggetto	3	6	5	7	10	8
v_i	19	22	15	29	33	40
p_i	6	7	5	10	12	15

e una capacità residua pari a $b - (p_1 + p_9) = 36 - (8 + 3) = 25$. Poiché $p_3 + p_6 + p_5 = 18$, $p_3 + p_6 + p_5 + p_7 = 28 > 25$, l'upper bound cercato è

$$UB = v(I_1) + 19 + 22 + 15 + \left\lfloor 7 \cdot \frac{29}{10} \right\rfloor = 38 + 46 + 20 = 104.$$

Una soluzione ammissibile per il problema residuo è semplicemente $\{3, 6, 5\}$, quindi

$$LB = v(I_1) + v(\{3, 6, 5\}) = 38 + 46 = 84.$$

I nuovi nodi risultanti dal branch corrispondono ai sottoinsiemi

$$S(I_0 \cup \{7\}, I_1) \quad \text{e} \quad S(I_0, I_1 \cup \{7\}).$$

3. Dopo la riduzione dei costi si ottiene la matrice iniziale, sulla quale si può identificare l'accoppiamento $\Delta = \{(a_1, b_3), (a_2, b_1)\}$ con la relativa copertura (altri accoppiamenti sono evidentemente

possibili).

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 \\ \begin{array}{c} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \end{array} & \begin{pmatrix} 7 & 8 & \mathbf{0} & 9 & 12 \\ \mathbf{0} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 6 & 0 & 8 & 6 \\ 8 & 4 & 0 & 9 & 7 \\ 11 & 6 & 0 & 6 & 5 \end{pmatrix} \end{array} & \Rightarrow & \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 \\ \begin{array}{c} a_1 \\ \cancel{a_2} \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \end{array} & \begin{pmatrix} 7 & 8 & \mathbf{0} & 9 & 12 \\ \mathbf{0} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 6 & 0 & 8 & 6 \\ 8 & 4 & 0 & 9 & 7 \\ 11 & 6 & 0 & 6 & 5 \end{pmatrix} \end{array} & \lambda = 4. \end{array}$$

Aggiornando i costi con $\lambda = 4$ si ottiene

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 \\ \begin{array}{c} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \end{array} & \begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 & 5 & 8 \\ 0 & 0 & 4 & \mathbf{0} & 0 \\ \mathbf{0} & 2 & 0 & 4 & 2 \\ 4 & \mathbf{0} & 0 & 5 & 3 \\ 7 & 2 & \mathbf{0} & 2 & 1 \end{pmatrix} \end{array} & \Rightarrow & \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 \\ \begin{array}{c} a_1 \\ \cancel{a_2} \\ \cancel{a_3} \\ \cancel{a_4} \\ a_5 \end{array} & \begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 & 5 & 8 \\ 0 & 0 & \mathbf{4} & \mathbf{0} & 0 \\ \mathbf{0} & 2 & 0 & 4 & 2 \\ 4 & \mathbf{0} & 0 & 5 & 3 \\ 7 & 2 & \mathbf{0} & 2 & 1 \end{pmatrix} \end{array} & \lambda = 1. \end{array}$$

Il successivo aggiornamento dà quanto segue.

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 \\ \begin{array}{c} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \end{array} & \begin{pmatrix} 2 & 3 & \mathbf{0} & 5 & 7 \\ 0 & 0 & 4 & \mathbf{0} & 0 \\ \mathbf{0} & 2 & 1 & 4 & 2 \\ 3 & \mathbf{0} & 1 & 4 & 2 \\ 6 & 1 & 0 & 1 & \mathbf{0} \end{pmatrix} \end{array}$$

$\Delta^* = \{(a_1, b_3), (a_2, b_4), (a_3, b_1), (a_4, b_2), (a_5, b_5)\}$, di costo $z^* = 3 + 3 + 7 + 7 + 8 = 28$ è una soluzione ottima.

4. Detto $G(V, A)$, $(s, t) \notin A$, il grafo in questione, con costi e capacità rispettivamente d_{ij} e c_{ij} , $(i, j) \in A$, si crei un nuovo grafo $G'(V', A')$ con nodi e archi

$$V' = V,$$

$$A' = A \cup \{(t, s)\},$$

capacità

$$d'_{ij} = d_{ij}, \text{ per } (i, j) \in A,$$

$$d'_{ts} = \infty,$$

costi

$$c'_{ij} = 0, \text{ per } (i, j) \in A,$$

$$d'_{ts} = -1,$$

e bilanci tutti nulli $b_i = 0$, $i \in V'$.

In ogni soluzione ammissibile, il flusso f instradato da s a t risulta uguale al flusso x_{ts} che scorre sull'arco aggiunto. Il costo della soluzione è dato da $c_{ts} \cdot f = -f$; all'ottimo, si ottiene una soluzione di costo $-f^*$, con f^* pari al massimo flusso che può essere instradato da s a t .