

COMPITO DI RICERCA OPERATIVA II

ESERCIZIO 1. (7 punti) Sia dato il problema TSP con la seguente tabella delle distanze

	1	2	3	4	5	6	7
1	—	3	8	7	5	4	6
2	7	—	9	4	9	8	6
3	10	9	—	7	6	5	7
4	3	9	3	—	4	8	8
5	12	11	3	4	—	7	9
6	7	11	10	8	4	—	1
7	3	10	2	10	11	12	—

Si consideri il sottinsieme della regione ammissibile $S(A_0, A_1)$ con

$$A_0 = \{(1, 3)\} \quad A_1 = \{(3, 5), (5, 6)\}.$$

Si calcoli un lower bound per tale sottinsieme e sulla base del risultato ottenuto si effettui il branching del sottinsieme stesso.

ESERCIZIO 2. (7 punti) Sia dato il problema TSP simmetrico con la seguente tabella delle distanze

	1	2	3	4	5
1	—	5	3	7	4
2		—	2	1	3
3			—	3	6
4				—	5
5					—

Lo si risolva, restituendo una soluzione ottima e il valore ottimo, attraverso l'algoritmo branch-and-bound con bound calcolati tramite il rilassamento 1-tree, utilizzando sempre come nodo a il nodo 1.

ESERCIZIO 3. (7 punti) Sia dato il problema KNAPSACK con capacità dello zaino $b = 16$ e con 5 oggetti aventi i seguenti valori v_i e pesi p_i

i	1	2	3	4	5
v_i	362	241	605	263	282
p_i	8	7	11	6	9

Utilizzando lo schema di approssimazione completamente polinomiale visto a lezione, se ne determini una soluzione ε -approssimata con $\varepsilon = 0.1$.

ESERCIZIO 4. (4 punti) Si enunci il principio di ottimalità della programmazione dinamica e si spieghi perchè è soddisfatto nel problema dello zaino.

ESERCIZIO 5. (3 punti) In un problema di flusso a costo minimo su una rete $G = (V, A)$ e *senza* capacità sugli archi, quando la regione ammissibile è limitata (ovvero non ci sono archi lungo cui il flusso può divergere all'infinito)? Quando, invece, si ha sia che la regione ammissibile è illimitata sia che il valore della funzione obiettivo è illimitato su di essa?

ESERCIZIO 6. (2 punti) Dire se è vero o falso (*giustificando la risposta*) che in un problema di assegnamento il rapporto tra la cardinalità della regione ammissibile e il tempo di esecuzione dell'algoritmo ungherese cresce esponenzialmente rispetto alla cardinalità comune n dei due insiemi con cui formare le coppie.

ESERCIZIO 7. (3 punti) Si consideri un problema TSP simmetrico su un grafo completo $G = (V, A)$ con distanze degli archi $(i, j) \in A$ pari a d_{ij} . Sia

$$d^* = \min_{(i,j) \in A} d_{ij},$$

la più piccola delle distanze degli archi. Si supponga che valga la seguente proprietà

$$d_{ij} \leq 2d^* \quad \forall (i, j) \in A.$$

Si dimostri che se vale tale proprietà, ogni algoritmo che restituisca un circuito hamiltoniano è un algoritmo di 1-approssimazione.

SOLUZIONI

1. Specificando gli insiemi $A_0 = \{(1, 3)\}$ e $A_1 = \{(3, 5), (5, 6)\}$ si genera il problema con costi

$$\begin{array}{c} 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 7 \\ \begin{array}{l} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 6 \\ 7 \end{array} \left(\begin{array}{ccccc} \infty & 3 & \infty & 7 & 6 \\ 7 & \infty & 9 & 4 & 6 \\ 3 & 9 & 3 & \infty & 8 \\ 3 & 11 & 10 & 8 & 1 \\ 3 & 10 & 2 & 10 & \infty \end{array} \right)$$

ottenuto ponendo $d_{13} = \infty$ e cancellando le righe 3 e 5 e le colonne 5 e 6. Per calcolare il lower bound associato si applica l'algoritmo ungherese, cominciando a ridurre la matrice. Si ottiene quindi la matrice

$$\begin{array}{c} 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 7 \\ \begin{array}{l} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 6 \\ 7 \end{array} \left(\begin{array}{ccccc} \infty & \mathbf{0} & \infty & 3 & 5 \\ 4 & \infty & 7 & \mathbf{0} & 5 \\ \mathbf{0} & 6 & 1 & \infty & 7 \\ 4 & 8 & 8 & 4 & \mathbf{0} \\ 0 & 7 & \mathbf{0} & 6 & \infty \end{array} \right)$$

sulla quale si riconosce l'accoppiamento 5×5 $M = \{(1, 2), (2, 4), (4, 1), (6, 7), (7, 4)\}$, di costo (ottimo) $z^* = 13$. La soluzione corrispondente, tenuto conto di A_1 , è

$$S = \{(1, 2), (2, 4), (4, 1), (6, 7), (7, 3), (3, 5), (5, 6)\},$$

non ammissibile perchè divisa in due sottocicli. Il valore corrispondente del lower bound è $LB = 6 + 7 + 13 = 26$.

Effettuando il branch sul sottoinsieme di archi $\{(6, 7), (7, 3)\}$ si possono ottenere i nodi figli

$$N_1: A_0 = \{(1, 3), (6, 7)\}, A_1 = \{(3, 5), (5, 6)\},$$

$$N_2: A_0 = \{(1, 3), (7, 3)\}, A_1 = \{(3, 5), (5, 6), (6, 7)\}.$$

2. Al nodo radice 0, applicando l'algoritmo per il calcolo dell'1-albero di costo minimo si ottiene l'1-albero

$$T_0 = \{(1, 3), (1, 5), (2, 3), (2, 4), (2, 5)\} \quad \text{di costo } LB_0 = 13;$$

la presenza del sottociclo $\{(1, 3), (2, 3), (2, 5), (1, 5)\}$ permette di generare quattro nodi figli.

$$\text{Nodo 1: } A_0 = \{(1, 3)\}, A_1 = \emptyset;$$

$$\text{Nodo 2: } A_0 = \{(2, 3)\}, A_1 = \{(1, 3)\};$$

$$\text{Nodo 3: } A_0 = \{(2, 5)\}, A_1 = \{(1, 3), (2, 3)\};$$

$$\text{Nodo 4: } A_0 = \{(1, 5)\}, A_1 = \{(1, 3), (2, 3), (2, 5)\}.$$

Calcolando nell'ordine gli 1-alberi di costo minimo associati, si ottiene quanto segue.

Nodo 1: $T_1 = \{(1, 2), (1, 5), (2, 3), (2, 4), (2, 5)\}$, $LB_1 = 15$;

Nodo 2: $T_2 = \{(1, 3), (1, 5), (2, 4), (2, 5), (3, 4)\}$, $LB_2 = 14$; T_2 rappresenta anche una soluzione ammissibile, quindi il nodo 2 viene chiuso e si fissa $UB = 14$. Questo permette anche di chiudere il nodo 1 in quanto $LB_1 \leq UB$.

Nodo 3: $T_3 = \{(1, 3), (1, 5), (2, 3), (2, 5), (4, 5)\}$, $LB_3 = 15 \leq UB$, nodo chiuso.

Nodo 4: $T_4 = \{(1, 2), (1, 3), (2, 3), (2, 4), (2, 5)\}$, $LB_4 = 14 \leq UB$, nodo chiuso.

La ricerca si conclude quindi con la soluzione ottima corrispondente a T_1 .

3. Ponendo

$$t = \left\lfloor \log_{10} \left(\frac{\varepsilon v_{\max}}{n} \right) \right\rfloor = 1,$$

si ottiene l'istanza modificata con valori

$$\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_5 = 360, 240, 600, 260, 280$$

e pesi e capacità invariate. Risolvendo l'istanza modificata si ottiene la soluzione ottima $S^* = \{1, 4\}$ di peso $p(S^*) = 14$ e valore $\bar{v}(S^*) = 620$, che corrisponde a una soluzione ammissibile per l'istanza originale con valore $v(S^*) = 625$. Poiché $v(S^*) > v_{\max}$ questa è anche una soluzione 0.1-approssimata per l'istanza originale.

4. Si faccia riferimento agli appunti del corso.
5. La regione ammissibile è limitata quando il grafo non contiene circuiti. Quando il grafo contiene almeno un circuito, è possibile assegnare agli archi del circuito valori di flusso arbitrariamente grandi senza violare i vincoli di conservazione del flusso — si veda ad es. l'esercizio 3.7 della raccolta del corso. Quando un tale circuito ha costo totale negativo, la funzione obiettivo può decrescere indefinitamente.
6. Un problema di assegnamento $n \times n$ ha $n!$ possibili soluzioni. L'algoritmo ungherese ha tempo di calcolo — per le implementazioni più efficienti — dell'ordine di $\mathcal{O}(n^3)$. Il rapporto cercato è quindi

$$R(n) \simeq \frac{n!}{n^3} \simeq \frac{\sqrt{2\pi n} n^n}{e^n \cdot n^3} = \sqrt{2\pi n}^{-\frac{3}{2}} e^{n-1}$$

che è una funzione dalla crescita esponenziale (bastava anche osservare che già $n!$ cresce in modo superesponenziale).

7. Senza perdita di generalità, si assuma $c_{ij} \geq 0 \forall (i, j) \in A$. Sia C^* il circuito hamiltoniano di costo minimo, e C un qualunque circuito hamiltoniano, e sia $|V| = n$. Poiché ogni circuito hamiltoniano è composto da n archi, il costo del cammino ottimo deve essere $d(C^*) \geq nd^*$. Quindi, per ogni C ,

$$\frac{d(C)}{d(C^*)} \leq \frac{\sum_{(i,j) \in C} d_{ij}}{nd^*} \leq \frac{2nd^*}{nd^*} = 2.$$