

COMPITO DI RICERCA OPERATIVA II

ESERCIZIO 1. (7 punti) Sia dato il problema TSP simmetrico con la seguente tabella delle distanze

	1	2	3	4	5
1	—	3	6	4.5	5
2		—	1	3	4
3			—	2	6
4				—	4.5
5					—

Viene chiesto di:

- calcolare il lower bound del nodo radice usando il rilassamento 1-tree (usando il nodo 1 come nodo a);
- eseguire l'operazione di branching del nodo radice;
- calcolare il lower bound dei nodi figli sempre usando il rilassamento 1-tree;

Non è richiesto di procedere oltre nell'esecuzione dell'algoritmo branch-and-bound anche qualora vi siano ancora nodi figli non ancora cancellati, ma si richiede di ricalcolare il lower bound del nodo radice questa volta usando il duale lagrangiano.

ESERCIZIO 2. (7 punti) Sia dato il problema KNAPSACK con capacità dello zaino $b = 8$ e con 5 oggetti aventi i seguenti valori v_i e pesi p_i

i	1	2	3	4	5
v_i	9787	5401	4402	5458	4093
p_i	8	4	3	5	2

Utilizzando lo schema di approssimazione completamente polinomiale, si determini prima una soluzione 0.1-approssimata del problema, poi una soluzione 0.01-approssimata e si faccia quindi un confronto tra le due.

ESERCIZIO 3. (7 punti) Sia data la rete $G = (V, A)$ con

$$V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$$

e

$$A = \{(1, 2), (1, 3), (2, 4), (3, 2), (3, 4), (5, 4), (6, 4), (6, 5), (7, 5), (7, 6)\}$$

con i seguenti costi unitari di trasporto c_{ij} e capacità d_{ij}

arco	(1, 2)	(1, 3)	(2, 4)	(3, 2)	(3, 4)	(5, 4)	(6, 4)	(6, 5)	(7, 5)	(7, 6)
c_{ij}	9	2	8	8	11	5	7	1	2	15
d_{ij}	5	2	6	1	3	8	7	3	3	5

e i seguenti valori b_i associati ai nodi

nodo	1	2	3	4	5	6	7
b_i	5	0	0	-10	0	0	5

Determinare una soluzione ottima e il valore ottimo per questo problema di flusso a costo minimo a partire dalla tripla iniziale

$$B = \{x_{12}, x_{13}, x_{24}, x_{54}, x_{64}, x_{76}\} \quad N_0 = \{x_{34}, x_{65}, x_{75}\} \quad N_1 = \{x_{32}\}.$$

ESERCIZIO 4. (5 punti) Si dia la definizione di rilassamento di un problema di ottimizzazione. Si definisca il rilassamento lagrangiano di un problema e il corrispondente duale lagrangiano.

ESERCIZIO 5. (4 punti) Si definiscano la classe P e la classe NP di problemi di ottimizzazione e si indichi la relazione esistente tra di essi. Si definisca la classe dei problemi NP -completi.

ESERCIZIO 6. (3 punti) Se consideriamo la sottoclasse dei problemi TSP in cui il rapporto tra la distanza massima d_{max} e quella minima d_{min} non supera una certa soglia t , è corretto affermare che anche per questa sottoclasse i problemi di ε -approssimazione sono *NP*-completi per ogni $\varepsilon > 0$? Si consideri ora un generico problema TSP con distanze tutte non negative. Lo si modifichi sommando a ogni distanza il valore della distanza massima d_{max} . È giusto affermare che ogni soluzione ottima del problema modificato è anche soluzione ottima del problema originario? Ed è giusto affermare che ogni soluzione ε -approssimata del problema modificato è anche una soluzione ε -approssimata del problema originario?

SOLUZIONI

1. Dalla matrice dei costi si può ricavare l'1-albero

$$T_0 = \{(1, 2), (1, 4), (2, 3), (2, 5), (3, 4)\},$$

che fornisce il lower bound $LB_0 = 14.5$. Il sottociclo $(1, 2), (2, 3), (3, 4), (1, 4)$ può essere utilizzato per il branch, generando i seguenti nodi.

$$\text{Nodo 1: } A_0 = \{(1, 2)\}, A_1 = \emptyset, T_1 = \{(1, 4), (1, 5), (2, 3), (2, 5), (3, 4)\}, LB_1 = 16.5$$

$$\text{Nodo 2: } A_0 = \{(2, 3)\}, A_1 = \{(1, 2)\}, T_2 = \{(1, 2), (1, 4), (2, 4), (2, 5), (3, 4)\}, LB_2 = 16.5$$

$$\text{Nodo 3: } A_0 = \{(3, 4)\}, A_1 = \{(1, 2), (2, 3)\}, T_3 = \{(1, 2), (1, 4), (2, 3), (2, 4), (2, 5)\}, LB_3 = 15.5$$

$$\text{Nodo 4: } A_0 = \{(1, 4)\}, A_1 = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4)\}, T_4 = \{(1, 2), (1, 5), (2, 3), (2, 5), (3, 4)\}, LB_4 = 15.$$

Per applicare il duale lagrangiano al nodo radice, si assume di partire da $\lambda_1 = \dots = \lambda_5 = 0$ e si aggiornano i moltiplicatori associati ai nodi 2 e 5: $\lambda_2 = -1, \lambda_5 = 1$. La matrice dei costi ridotti è

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 7 \end{array} & \begin{pmatrix} - & 4 & 6 & 4.5 & 4 \\ & - & 2 & 4 & 4 \\ & & - & 2 & 5 \\ & & & & 3.5 \\ & & & & - \end{pmatrix} \end{array} \end{array}$$

dalla quale si ottiene

$$T_0(\lambda) = \{(1, 2), (1, 5), (2, 3), (3, 4), (4, 5)\}$$

(tour valido) che dà come lower bound $LB_0 = 15.5$.

2. Con $\varepsilon = 0.1$ si ottiene il valore di $t = \lfloor \log_{10}(0.1 \cdot 9787/5) \rfloor = 2$, e quindi un problema dello zaino con valori modificati

$$\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_5 = 9700, 5400, 4400, 5400, 4000,$$

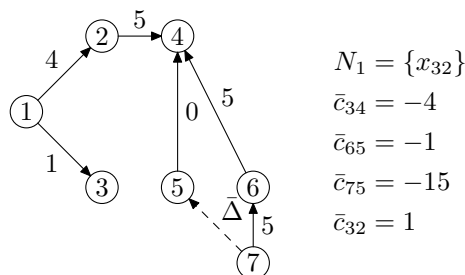
e gli altri dati invariati. L'ottimo del problema di appoggio è $S^* = \{2, 3\}$, $v(S^*) = 9803$.

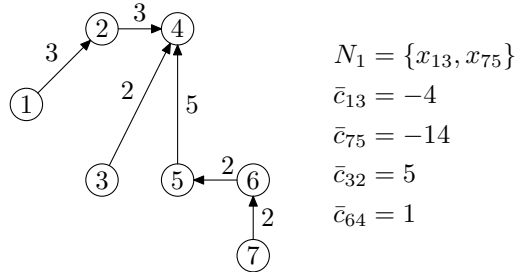
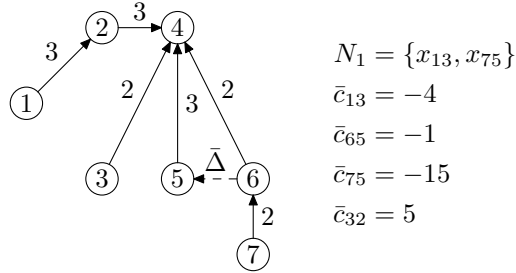
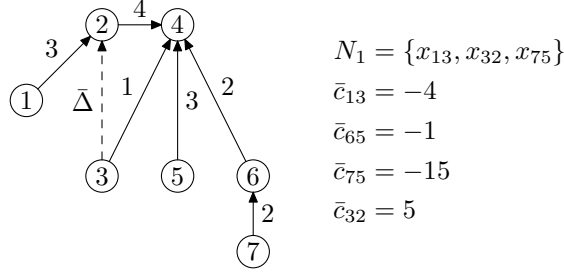
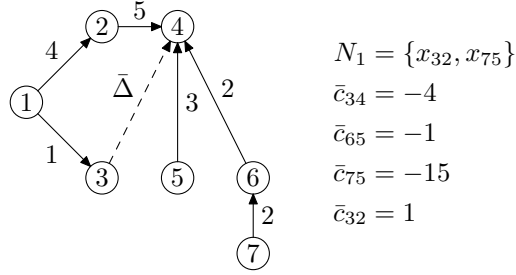
Con $\varepsilon = 0.01$ si ottiene il valore di $t = \lfloor \log_{10}(0.01 \cdot 9787/5) \rfloor = 1$, e quindi un problema dello zaino con valori modificati

$$\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_5 = 9780, 5400, 4400, 5450, 4090,$$

e gli altri dati invariati. L'ottimo del problema di appoggio è $S^* = \{3, 4\}$, $v(S^*) = 9860$; l'approssimazione è migliore di quanto ottenuto nel caso precedente (in questo caso, è proprio l'ottimo).

3. Partendo dalla base specificata si ottiene quanto segue.





6. L'affermazione è falsa. Sia C^* un tour ottimo per un'istanza di TSP nella quale $d_{\max}/d_{\min} \leq t$, e A una qualunque altra soluzione. Ovviamente $d(A) \leq nd_{\max}$, e $d(C^*) \geq nd_{\min}$. Per questo genere di problemi risulta allora

$$\frac{d(A)}{d(C^*)} \leq \frac{nd_{\max}}{d(C^*)} \leq \frac{nd_{\max}}{nd_{\min}} \leq t.$$

Il problema di ε -approssimazione è quindi banale per $\varepsilon \leq t - 1$.

Il problema modificato ha distanze $d'_{ij} = d_{\max} + d_{ij}$, per ogni (i, j) . Ogni tour C ha costo, per il problema modificato,

$$d'(C) = \sum_{(i,j) \in C} d'_{ij} = nd_{\max} + \sum_{(i,j) \in C} d_{ij} = d(C) + nd_{\max},$$

pari al costo del tour nel problema originale più la costante $nd_{\max}$. Quindi un tour C^* è ottimo per il problema originale se e solo se è anche ottimo per il problema modificato.

La corrispondenza non vale per le soluzioni approssimate: sia A una soluzione approssimata del problema modificato. Allora

$$\frac{d'(A)}{d'(C^*)} = \frac{nd_{\max} + d(A)}{nd_{\max} + d(C^*)}$$

dove, per valori sufficientemente grandi di $nd_{\max}$, il rapporto tende a 1, qualunque sia il valore di $d(A)/d(C^*)$. Inoltre, si noti che

$$d'_{\max} = 2d_{\max}, \quad d'_{\min} = d_{\max} + d_{\min} \geq d_{\max}$$

da cui

$$\frac{d'_{\max}}{d'_{\min}} \leq 2,$$

il che, in base a quanto osservato sopra, ci dice che per il problema modificato è sempre possibile trovare in tempo polinomiale una soluzione 1-approssimata, cosa certamente non vera per il problema originario.