Il problema TSP metrico

Caso particolare di TSP in cui si introducono delle restrizioni sui possibili valori che possono assumere le distanze lungo gli archi di un grafo:

- è simmetrico, cioè $d_{ij} = d_{ji}$ per ogni i, j;
- $d_{ij} \geq 0$, cioè le distanze degli archi sono tutte non negative;
- le distanze soddisfano la diseguaglianza triangolare:

$$\forall\ i, j, k \ :\ \ d_{ij} + d_{jk} \geq d_{ik}$$

Esempio

Grafo completo con 4 nodi e la seguente matrice delle distanze:

	1	2	3	4
1	$-$	2	4	10
2	2	$-$	3	8
3	4	3	$-$	6
4	10	8	6	$-$

Algoritmo *Double Spanning Tree*

- **Passo 1** Dato il grafo $G = (V, A)$, si determini un albero di supporto a costo minimo di tale grafo e lo si indichi con $T = (V, A_T)$.
- **Passo 2** Si duplichi ogni arco in A_T assegnando ad ogni arco duplicato la stessa distanza dell'arco originale. Sul grafo risultante si determini un *ciclo euleriano*, ovvero un ciclo che partendo da un nodo attraversi tutti gli archi del grafo una ed una sola volta.

Continua

- **Passo 3** Dalla sequenza di nodi del ciclo euleriano

$$i_1 \to i_2 \to \cdots \to i_{2n-2} \to i_{2n-1} = i_1$$

si eliminino tutte le ripetizioni di nodi a parte quella dell'ultimo nodo. La sequenza di nodi risultante è un circuito hamiltoniano.

Nell'esempio

Albero di supporto ottimo:

$$T^* = (V, A_{T^*}) \quad A_{T^*} = \{(1,2);(2,3);(3,4)\}$$

Ciclo euleriano:

$$1 \to 2 \to 3 \to 4 \to 3 \to 2 \to 1$$

Circuito hamiltoniano:

$$1 \to 2 \to 3 \to 4 \to 1$$

Osservazioni

1) L'algoritmo DST richiede tempo di esecuzione polinomiale rispetto alla dimensione dell'istanza.

2) Un grafo ammette un ciclo euleriano se e solo se tutti i suoi nodi hanno grado pari. Nel nostro caso, avendo raddoppiato tutti gli archi dell'albero di supporto ottimo (e quindi i gradi dei nodi di tale albero), la condizione è ovviamente soddisfatta.

Come calcolare un ciclo euleriano

- **Passo 1** Dato l'albero $T = (V, A_T)$, si fissi un suo nodo radice v^* in modo arbitrario. Si ponga:

$$S = \emptyset, \quad i_1 = v^*, \quad k = 2, \quad w = v^*.$$

- **Passo 2** Se w ha nodi figli in $V \setminus S$, allora si selezioni un suo nodo figlio $z \in V \setminus S$, si ponga

$$w = z, \quad i_k = z, \quad k = k + 1$$

e si ripeta il Passo 2.
Altrimenti (cioè se w non ha nodi figli in $V \setminus S$): se $w \neq v^*$, si risalga al nodo padre y di w, si ponga

$$S = S \cup \{w\}, \quad w = y, \quad i_k = y, \quad k = k + 1$$

e si ripeta il Passo 2; altrimenti (se $w = v^*$) ci si arresti.

Osservazione

Per il TSP metrico l'algoritmo DST è un algoritmo di 1-approssimazione.

Dimostrazione

Sia $T = (V, A_T)$ l'albero di supporto a costo minimo individuato al Passo 1 dell'algoritmo e sia

$$i_1 \rightarrow i_2 \rightarrow \cdots \rightarrow i_{2n-2} \rightarrow i_{2n-1} = i_1$$

il ciclo euleriano individuato al Passo 2 dell'algoritmo dopo aver raddoppiato gli archi dell'albero T. Indichiamo con

$$A_Q = \{(i_j, i_{j+1}) \ : \ j = 1, \ldots, 2n-2\}$$

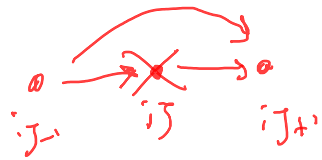
l'insieme degli archi di tale ciclo.

Si noti che

$$\sum_{e \in A_Q} d_e = 2 \sum_{e \in A_T} d_e .$$

Quando nel Passo 3. rimuoviamo un nodo i_j in quanto già presente, sostituiamo nel cammino la coppia di archi

$$(i_{j-1}, i_j) \quad (i_j, i_{j+1})$$



con il singolo arco

$$(i_{j-1}, i_{j+1}).$$

Ma per la diseguaglianza triangolare si ha

$$d_{i_{j-1}, i_j} + d_{i_j, i_{j+1}} \geq d_{i_{j-1}, i_{j+1}} .$$

Ripetendo questo ragionamento per ogni nodo rimosso, si ha che il circuito hamiltoniano $C = (V, A_C)$

$$i'_1 \rightarrow \ldots \rightarrow i'_n \rightarrow i'_1$$

ottenuto dal ciclo euleriano con l'eliminazione dei nodi ripetuti, ha distanza complessiva certamente non superiore a quella del ciclo euleriano:

$$\sum_{e \in A_C} d_e \leq \sum_{e \in A_Q} d_e = 2 \sum_{e \in A_T} d_e.$$

Ma per la non negatività degli archi si ha che il circuito hamiltoniano $C^* = (V, A_{C^*})$ soluzione ottima del problema di TSP metrico, ha valore complessivo non inferiore a quello dell'albero di supporto a costo minimo, cioè

$$\sum_{e \in A_{C^*}} d_e \geq \sum_{e \in A_T} d_e.$$

Infatti, rimuovendo un qualsiasi arco del circuito si riduce il valore complessivo dell'insieme di archi (per la non negatività del peso dell'arco rimosso) e si ottiene un grafo ancora connesso ed aciclico, ovvero un albero di supporto il cui valore non può essere inferiore a quello dell'albero T che ha costo minimo.

E quindi ...

$$\sum_{e \in A_C} d_e \leq 2 \sum_{e \in A_T} d_e \leq 2 \sum_{e \in A_{C*}} d_e,$$

o, equivalentemente,

$$\frac{\sum_{e \in A_C} d_e}{\sum_{e \in A_{C*}} d_e} \leq 2,$$

e ciò dimostra che l'algoritmo DST è un algoritmo di 1-approssimazione per il problema TSP metrico.

Domanda

È possibile fare di meglio per il problema TSP metrico? Ovvero esiste un algoritmo di ε-approssimazione con valore di $\varepsilon < 1$?

Un tale algoritmo esiste, anche se non lo vedremo, ed il corrispondente valore di ε è 0.5.

Ma ...

... si ha anche il seguente risultato negativo.

Per il problema TSP *metrico esiste un* $\overline{\varepsilon} > 0$ *tale che per ogni* $\varepsilon \leq \overline{\varepsilon}$ *il problema di* ε*-approssimazione associato al* TSP *metrico è* $\mathcal{NP}$*-completo.*