Indice

Algoritmo del Simplesso rivisto

Esempio di applicazione con spiegazione dell'algoritmo del Simplesso rivisto:

Mettiamo di avere il seguente problema di programmazione lineare:

$\min 2x_1 - 3x_2 + x_3 - 4x_4 + x_5$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 4 \\ 2x_1 - x_3 + x_4 + x_5 = 2 \\ 3x_1 + x_3 + 2x_4 \leq 1 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{cases}$$

Porto il problema in forma standard, cioè devo avere i vincoli espressi come uguaglianze, tutte le variabili positive e una funzione obbiettivo minimizzante, ossia qualcosa del tipo:

$\min espressione$

$$\begin{cases} Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases}$$

Se per caso avessi avuto come funzione obbiettivo $\max espressione$ allora avrei dovuto cambiare tutti i segni dell'espressione della funzione obbiettivo.

Quindi se avessi avuto, ad esempio, come funzione obbiettivo: $\max x_1 - x_2$ in forma standard sarebbe diventata: $\min -x_1 + x_2$

Se nel vincolo invece ho una disuguaglianza per riportarlo nella forma standard introduco delle variabili di scarto, ovvero aggiungo delle variabili in più che si vanno a sommare o sottrarre in caso sia minore o maggiore.

Quindi se ho:

$$\begin{cases} Ax \leq b \\ x \geq 0 \end{cases}$$

Riportandolo in forma standard diventa:

$$\begin{cases} Ax + s_1 = b \\ x, s_1 \geq 0 \end{cases}$$

Quindi, poiché Ax era più piccolo di b gli aggiungo una certa quantità positiva s_1 tale che si eguaglino.

Se ho:

$$\begin{cases} Ax \geq b \\ x \geq 0 \end{cases}$$

Ottengo:

$$\begin{cases} Ax - s_1 = b \\ x, s_1 \geq 0 \end{cases}$$

Quindi ritornando al nostro esempio, se lo riporto in forma standard diventa:

$\min 2x_1 - 3x_2 + x_3 - 4x_4 + x_5$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 4 \\ 2x_1 - x_3 + x_4 + x_5 = 2 \\ 3x_1 + x_3 + 2x_4 + x_6 = 1 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0 \end{cases}$$

In questo caso la variabile di scarto l'ho chiamata x_6

Indico con A la matrice dei coefficienti delle variabili del sistema:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

E indico con b il vettore dei termini noti:

$$b = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ora bisogna individuare una base iniziale da cui partire.

Una base è una sottomatrice $k \times k$ di A che non è singolare (cioè il suo determinante è diverso da 0) e se le aggiungessi una riga e una colonna otterrei, invece, sempre una matrice singolare.

La dimensione della base è data dal rango della matrice A.

Si può scegliere una base qualsiasi da cui partire, ma è sempre bene scegliersi la matrice d'identità per evitare di fare calcoli complessi. In questo caso la matrice d'identità si ottiene se scelgo la sottomatrice formata dalle colonne A_2, A_5, A_6.

$$B = (A_2\ A_5\ A_6) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Calcolo l'inversa della base (la matrice inversa per la matrice di partenza danno come risultato la matrice di identità):

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

L'inversa della matrice d'identità è sempre la matrice d'identità.

Ora definisco due vettori, uno per le variabili in base (x_B) e l'altro per le variabili fuori base (x_F).

Le variabili in base sono x_2, x_5, x_6 perché la base che ho scelto precedentemente conteneva le colonne che erano associate ai coefficienti di queste tre variabili. Poiché x_2, x_5, x_6 sono in base significa che le altre, cioè x_1, x_3, x_4 sono variabili fuori base.

Per definizione ho una soluzione base se $x_F = 0$ e $x_B = B^{-1} \cdot b$.

Si dice che questa soluzione base è ammissibile (SBA) se $B^{-1} \cdot b \geq 0$

Tornando al nostro problema dunque:

$$x_B = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} = B^{-1} \cdot b = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$x_F = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ x_F è sempre nulla per definizione.

Quella che ho trovato è una soluzione base ammissibile poiché gli elementi di x_B sono tutti maggiori o uguali a zero. Se un solo elemento fosse stato minore di zero avrei dovuto buttar via questa base e sceglierne un'altra.

Ora bisogna verificare se la soluzione base ammissibile che abbiamo trovato sia ottima. Prima, però, ci costruiamo una matrice (chiamata matrice carry) che potrebbe servirci in seguito.

Questa è la "forma" della matrice carry:

$-\mu^T$	$-\mu^T \cdot b$
B^{-1}	x_B

Dove:

$$-\mu^T = -c_B^T \cdot B^{-1}$$

c_B^T è il vettore dei costi trasposto delle variabili in base. I suoi elementi non sono nient'altro che i coefficienti delle variabili in base nella funzione obbiettivo.

Quindi nel nostro caso:

$$c_B^T = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Poiché x_6 non compare nella funzione obbiettivo il suo coefficiente è 0.

Perciò:

$$-\mu^T = -c_B^T \cdot B^{-1} = -\begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Invece, $-\mu^T \cdot b$ è il valore della funzione obbiettivo per la SBA corrente cambiato di segno. Cioè, se prendo i valori della soluzione base ammissibile che ho trovato:

$$x_B = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad x_F = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

E li sostituisco nella funzione obbiettivo otterrò un numero che è pari a $\mu^T \cdot b$

Nel nostro caso:

$$-\mu^T \cdot b = (3 \quad -1 \quad 0) \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 10$$

Ciò significa che il costo (cioè il valore) della funzione obbiettivo sarà -10

Ora posso quindi costruire la matrice carry:

$$\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & 0 & 10 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}$$

Ritornando al discorso di prima, devo verificare che la soluzione base ammissibile che ho trovato sia ottima.

La condizione di soluzione ottima è verificare che $\bar{c}_j = c_j - \mu^T \cdot A_j$ sia maggiore o uguale a zero per ogni variabile fuori base.

$\bar{c}_j$ indica il costo ridotto della variabile x_j e la soluzione per essere ottima deve avere tutti i costi ridotti maggiori o uguali a zero.

c_j è il costo della variabile x_j e corrisponde al coefficiente che ha tale variabile nella funzione obbiettivo.

A_j è la colonna dei coefficienti associata alla variabile x_j.

Poiché le variabili fuori base sono x_1, x_3, x_4 procedo nel calcolare i loro costi ridotti:

$$\bar{c}_1 = 2 + (3 \quad -1 \quad 0) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = 3$$

$$\bar{c}_3 = 1 + (3 \quad -1 \quad 0) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = 5$$

$$\bar{c}_4 = -4 + (3 \quad -1 \quad 0) \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = -8$$

La soluzione base ammissibile che abbiamo trovato non è ottima poiché abbiamo un costo ridotto negativo.

Se nei costi ridotti ho x numeri negativi, allora avrò x possibili direzioni di discesa.

Adesso devo scegliere una direzione per arrivare ad un altro vertice (preferibilmente in discesa).

Una direzione è in discesa se $c^T \cdot d < 0$

Dove c^T è il vettore dei costi di tutte le variabili del sistema.

Per scegliere una direzione in pratica prendo la variabile fuori base che ha costo ridotto negativo e la pongo maggiore di zero.

Nel caso avessi più costi ridotti negativi, devo usare la **regola di Bland,** che mi dice di scegliere quello di indice minimo, quindi devo scegliere il $\bar{c}_j$ con il j più piccolo. Questo perché se non usassi questo criterio potrei imbattermi in un ciclo (ovvero non si riuscirebbe a risolvere il problema).

In questo caso ho solo $\bar{c}_4$ negativo.

Direzione $x_4 > 0$

Per definizione le variabili fuori base devono essere uguali a zero, quindi x_4 non può più essere fuori base e dunque si dice che entra in base (cioè diventa una variabile in base).

Poiché x_4 è entrata in base, una variabile che prima era in base ora deve uscire dalla base e diventare così una variabile fuori base, tra poco mi calcolerò quale.

Dopo aver fatto entrare in base una variabile bisogna verificare la condizione di illimitatezza che è data da:

$$\bar{A}_j = B^{-1} \cdot A_j \leq 0$$

Quindi ho:

$$\bar{A}_4 = B^{-1} \cdot A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Se gli elementi di $\bar{A}_4$ fossero stati tutti minori o uguali a zero avrei potuto dire che il problema fosse illimitato inferiormente e che quindi per definizione la soluzione ottima sarebbe stata $-\infty$

Ma poiché ci sono elementi positivi non è detto che il problema sia illimitato inferiormente e quindi procedo con l'algoritmo.

Per determinare chi è la variabile uscente mi devo calcolare:

$$h = argmin\left\{\frac{x_{B_i}}{\bar{a}_{ij}}\ con\ \bar{a}_{ij} > 0\right\}$$

dove $\bar{a}_{ij}$ sono gli elementi di $\bar{A}_j$ (calcolata per verificare la condizione di illimitatezza).

Cioè nelle graffe metto ciascun elemento del vettore x_B fratto ciascun elemento del vettore $\bar{A}_j$. La funzione $argmin$ mi restituisce l'indice del numero minimo.

Quindi:

$$h = argmin\left\{\frac{4}{-1}, \frac{2}{1}, \frac{1}{2}\right\}$$

Poiché c'è la condizione che $\bar{a}_{ij} > 0$ dato che il primo elemento di $\bar{A}_4$ è -1 non dovrei neanche scriverlo $\frac{4}{-1}$ perché non va preso in considerazione, perciò al suo posto metto un pallino:

$$h = argmin\left\{\cdot, \frac{2}{1}, \frac{1}{2}\right\}$$

Adesso verifico chi è il minimo tra i numeri rimasti e h assumerà come valore proprio la posizione del minimo:

$$h = argmin\left\{\cdot\ ,2,\frac{1}{2}\right\} = 3$$

Quindi h vale 3 perché il minimo si trova in terza posizione.

Dalla base va fatta uscire l'h-esima variabile, perciò nel nostro caso uscirà la terza variabile che è x_6 e al suo posto entrerà x_4.

Se nell'argomento della funzione $argmin$ capitano più minimi, devo scegliere quello per cui h assuma un valore tale da far uscire la variabile di indice minimo (anche questa è parte della **regola di Bland**).

Se in base ho oltre alle x delle variabili artificiali y, devono uscire le x perché hanno indice minore rispetto le y. Infatti le variabili artificiali, sono variabili che aggiungo che potrei chiamare x (con indice incrementato rispetto alle x già presenti) però per distinguerle le chiamo y (ma comunque in realtà hanno un indice più grande rispetto le x).

Ad esempio nel nostro caso, abbiamo che:

$$x_B = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix}$$

Mettiamo che ci veniva: $h = argmin\{4,3,3\}$ quindi con due minimi. Avremmo dovuto scegliere $h = 2$ perché così esce la variabile x_j con j più piccolo, ovvero x_5

Quindi ora c'è un cambio di base, un cambio di $-\mu^T$, un cambio del vettore delle variabili in base x_B e un cambio del costo della funzione obbiettivo. Al posto di calcolarci tutti i valori in maniera indipendente si possono aggiornare tutti insieme aggiornando la matrice carry che abbiamo costruito prima.

Quindi prendiamo la matrice carry di prima e le aggiungiamo davanti una colonna, la forma della matrice diventerà questa:

$$\begin{array}{c|c|c} \bar{c}_j & -\mu^T & -\mu^T \cdot b \\ \hline \bar{A}_j & B^{-1} & x_B \end{array}$$

Quindi aggiungo a sinistra una colonna formata dal costo ridotto della variabile entrante e dalla sua colonna di coefficienti moltiplicata per la matrice inversa (cioè la colonna risultante dalla condizione di illimitatezza).

Quindi nel nostro caso abbiamo:

$$\begin{array}{c|ccc|c} -8 & 3 & -1 & 0 & 10 \\ \hline -1 & 1 & 0 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}$$

Per aggiornare la matrice devo annullare tutta la prima colonna tranne l'elemento di pivot che deve essere uno.

L'elemento di pivot è l'h-esimo elemento della colonna $\bar{A}_j$

Nel nostro caso $h = 3$ perciò il pivot è 2

Quindi, poiché il pivot deve essere 1 divido tutta la riga di pivot per il pivot stesso, perciò ottengo:

$$
\begin{array}{c|ccc|c}
-8 & 3 & -1 & 0 & 10 \\
\hline
-1 & 1 & 0 & 0 & 4 \\
1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\
1 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2
\end{array}
$$

Ora per annullare gli altri elementi della colonna moltiplico la riga di pivot aggiornata per una quantità opportuna e la sommo alla riga a cui voglio annullare il primo elemento.

Perciò se voglio annullare la penultima riga moltiplico la riga di pivot per -1 e ce la sommo, perciò ottengo:

$$
\begin{array}{c|ccc|c}
-8 & 3 & -1 & 0 & 10 \\
\hline
-1 & 1 & 0 & 0 & 4 \\
0 & 0 & 1 & -1/2 & 3/2 \\
1 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2
\end{array}
$$

Per annullare la prima riga moltiplico la riga di pivot per 8 e ce la sommo. Procedendo in questa maniera con le altre righe alla fine otterrò:

$$
\begin{array}{c|ccc|c}
0 & 3 & -1 & 4 & 14 \\
\hline
0 & 1 & 0 & 1/2 & 9/2 \\
0 & 0 & 1 & -1/2 & 3/2 \\
1 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2
\end{array}
$$

Ora la prima colonna la posso buttare via poiché non mi serve più, quindi la matrice carry aggiornata risulta:

$$
\begin{array}{ccc|c}
3 & -1 & 4 & 14 \\
\hline
1 & 0 & 1/2 & 9/2 \\
0 & 1 & -1/2 & 3/2 \\
0 & 0 & 1/2 & 1/2
\end{array}
$$

Perciò, ora ho una nuova soluzione base ammissibile che è:

$$
x_B = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_5 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9/2 \\ 3/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} \qquad x_F = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_3 \\ x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}
$$

Devo verificare se sia ottima ricalcolandomi i costi ridotti delle variabili fuori base, sapendo che:

$$
-\mu^T = (3 \quad -1 \quad 4)
$$

Ottengo:

$$\bar{c}_1 = c_1 - \mu^T \cdot A_1 = 2 + (3 \quad -1 \quad 4) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = 15$$

$$\bar{c}_3 = 1 + (3 \quad -1 \quad 4) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = 9$$

$$\bar{c}_6 = 0 + (3 \quad -1 \quad 4) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 4$$

Poiché tutti i costi ridotti sono maggiori o uguali a zero la soluzione base ammissibile corrente è ottima. Il costo della funzione obbiettivo è -14.

Nota: Per vedere se la carry è stata aggiornata correttamente, si possono sostituire i valori del nuovo x_B nelle equazioni del sistema e verificare che abbiano senso (questo perché x_B rappresenta una SBA, altrimenti significa che si è sbagliato qualcosa).

Algoritmo del simplesso con variabili artificiali

Se nella matrice dei coefficienti non c'è una matrice d'identità da scegliere come base di partenza allora la si può creare artificialmente.

Se manca la matrice d'identità significa che devo aggiungere le colonne di identità alla matrice dei coefficienti e questo si può fare aggiungendo delle variabili al sistema.

Quindi se ho un problema del tipo:

$$\min c^T \cdot x$$

$$\begin{cases} Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases}$$

Posso aggiungere la variabile artificiale y:

Prima pongo (cioè chiamo z il costo della funzione obiettivo, dato dalla somma delle variabili artificiali):

$$z = \sum_{i=1}^{m} y_i$$

Quindi il sistema diventa:

$$\min z$$

$$\begin{cases} Ax + Iy = b \\ x, y \geq 0 \end{cases}$$

Un sistema artificiale ha sempre una soluzione ammissibile e non è illimitato inferiormente.

Quindi a questo punto si applica l'algoritmo al sistema artificiale.

Se risolvendo il problema artificiale arrivo ad avere come soluzione ottima una soluzione che ha in base delle variabili artificiali non nulle (cioè un z maggiore di zero, poiché è dato dalla somma di tali variabili), allora il problema iniziale è impossibile.

Se z è uguale a zero, allora il problema iniziale è ammissibile. Ciò, comporta vari casi che verranno esaminati con gli esempi seguenti.

Esempio di risoluzione di un problema artificiale:

$$\min -x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 4 \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 + 3x_4 = 6 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{cases}$$

Andiamo a costruire la matrice dei coefficienti:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & -3 & 3 \end{pmatrix}$$

Se possibile sarebbe stato meglio scegliere la matrice di identità perché i calcoli sono molto più semplici, ma in questo caso non è presente, perciò o si sceglie una base diversa dalla matrice di identità (cosa che complica molto i calcoli) oppure si crea un sistema artificiale che la contiene.

Vedendo la matrice dei coefficienti ci si può rendere conto che per formare la matrice di identità 2×2 mancano le colonne $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Aggiungere tali colonne alla matrice dei coefficienti, equivale ad aggiungere due variabili alle equazioni del sistema.

Perciò aggiungo le variabili artificiali y_1 e y_2:

$$\min y_1 + y_2$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 + 2x_4 + y_1 = 4 \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 + 3x_4 + y_2 = 6 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, y_1, y_2 \geq 0 \end{cases}$$

Per definizione la funzione obbiettivo è data dalla somma delle variabili artificiali.

Ora risolviamo con il metodo del simplesso il sistema artificiale.

Matrice dei coefficienti:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -3 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Scelgo come base iniziale quella formata dalle colonne che se unite mi danno la matrice di identità:

$$B = (A_5\ A_6) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = B^{-1}$$

Poiché abbiamo scelto la matrice di identità la sua inversa è sempre se stessa.

Mi costruisco la matrice carry:

$$x_B = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = B^{-1} \cdot b = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Poiché x_B è maggiore o uguale a zero ho una soluzione base ammissibile, ma non so ancora se è ottima.

Le variabili in base sono variabili artificiali, l'obbiettivo è farle uscire dalla base.

$$-\mu^T = -c_B^T \cdot B^{-1} = -(1 \quad 1) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = (-1 \quad -1)$$

I costi (ovvero i coefficienti) di y_1 e y_2 vanno visti nella nuova funzione obbiettivo del sistema artificiale e non in quella del sistema originario.

$$z = \mu^T \cdot b = 10$$

Carry:

$$\begin{array}{cc|c} -1 & -1 & -10 \\ \hline 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 6 \end{array}$$

Quindi ora verifico se la SBA corrente è ottima iniziandomi a calcolare i costi delle variabili fuori base:

$$\bar{c}_1 = 0 + (-1 \quad -1) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = -3$$

Al posto di calcolare gli altri costi mi fermo già qui, perché faccio entrare in base x_1 poiché ha costo ridotto negativo e poiché (per la regola di Bland) è la variabile con costo ridotto negativo di indice minore.

Verifico la condizione di illimitatezza:

$$\bar{A}_1 = B^{-1} \cdot A_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Poiché non sono tutti minori o uguali a zero non è detto che il problema sia illimitato inferiormente.

Mi calcolo h:

$$h = argmin \left\{ \frac{4}{1}, \frac{6}{2} \right\} = 2$$

La variabile in seconda posizione nel vettore x_B è y_2 che quindi è la variabile uscente.

Aggiorno la carry affiancandoci la colonna di lavoro formata dal costo ridotto di x_1 e dalla colonna $\bar{A}_1$:

$$\begin{array}{c|cc|c} -3 & -1 & -1 & -10 \\ \hline 1 & 1 & 0 & 4 \\ 2 & 0 & 1 & 6 \end{array}$$

Aggiornandola ottengo:

$$\begin{array}{c|cc|c} 0 & -1 & 1/2 & -1 \\ \hline 0 & 1 & -1/2 & 1 \\ 1 & 0 & 1/2 & 3 \end{array}$$

Quindi ora ho la nuova soluzione base ammissibile:

$$x_B = \begin{pmatrix} y_1 \\ x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad x_F = \begin{pmatrix} y_2 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Verifico se è l'ottima calcolandomi i costi ridotti (delle sole x, i costi ridotti delle y non c'è bisogno di calcolarli):

$$\bar{c}_2 = 0 + (-1 \quad 1/2) \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{3}{2}$$

$$\bar{c}_3 = 0 + (-1 \quad 1/2) \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \end{pmatrix} = -\frac{9}{2}$$

Per lo stesso discorso di prima è inutile calcolarmi anche gli altri costi, faccio entrare in base x_3.

Verifico la condizione di illimitatezza:

$$\bar{A}_3 = B^{-1} \cdot A_3 = \begin{pmatrix} 1 & -1/2 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9/2 \\ -3/2 \end{pmatrix}$$

$$h = argmin\left\{\frac{2}{9}, \cdot\right\} = 1$$

Esce la prima variabile in base, cioè y_1

Aggiorno la carry (sapendo che il pivot è l'h-esimo elemento di $\bar{A}_3$, cioè $9/2$):

$$\begin{array}{c|cc|c} -9/2 & -1 & 1/2 & -1 \\ \hline 9/2 & 1 & -1/2 & 1 \\ -3/2 & 0 & 1/2 & 3 \end{array}$$

Diventa quindi:

$$\begin{array}{c|cc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 2/9 & -1/9 & 2/9 \\ 0 & 1/3 & 1/3 & 10/3 \end{array}$$

$$x_B = \begin{pmatrix} x_3 \\ x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/9 \\ 10/3 \end{pmatrix}$$

Verifico se è ottima:

$$\bar{c}_2 = 0 + (0 \quad 0) \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

$$\bar{c}_4 = 0 + (0 \quad 0) \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = 0$$

Poiché tutti i costi ridotti sono maggiori o uguali a zero la SBA corrente è ottima.

Il costo della funzione obbiettivo è nullo, ciò significa che il problema iniziale era ammissibile. Se fosse venuto un costo strettamente maggiore di zero, ciò avrebbe voluto dire che il problema iniziale era impossibile.

Se il problema iniziale è ammissibile, giunti a questo punto, ci si può trovare di fronte a diversi casi possibili.

In questo caso le variabili artificiali non sono più in base, quindi possiamo passare di nuovo al problema originale sapendo, grazie al problema artificiale, che:

$$x_B = \begin{pmatrix} x_3 \\ x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/9 \\ 10/3 \end{pmatrix} \qquad x_F = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 2/9 & -1/9 \\ 1/3 & 1/3 \end{pmatrix}$$

Quindi ora mi ricostruisco la matrice carry (come già detto questa volta faccio riferimento alla funzione obbiettivo e al sistema originale):

$$-\mu^T = -(-2 \quad -1) \cdot \begin{pmatrix} 2/9 & -1/9 \\ 1/3 & 1/3 \end{pmatrix} = (7/9 \quad 1/9)$$

$$-z = -\mu^T \cdot b = \frac{34}{9}$$

$$\begin{array}{cc|c} 7/9 & 1/9 & 34/9 \\ \hline 2/9 & -1/9 & 2/9 \\ 1/3 & 1/3 & 10/3 \end{array}$$

Verifico se la soluzione è ottima:

$$\bar{c}_2 = 1 + (7/9 \quad 1/9) \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}$$

$$\bar{c}_4 = 3 + (7/9 \quad 1/9) \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{44}{9}$$

Poiché i costi ridotti sono maggiori o uguali a zero la SBA corrente è ottima.

All'inizio del problema artificiale quando abbiamo calcolato il costo ridotto di x_1 e abbiamo visto che era uguale a -3 ci siamo subito fermati. Se calcolavamo anche gli altri costi ridotti anche quello di x_4 veniva negativo.

Ora riprendiamo il problema iniziale scegliendo di fare entrare in base x_4 e non più x_1. Questo perché così ci troveremo in un altro caso, ossia con una variabile artificiale nella base (mentre prima erano uscite tutte).

Per la regola di Bland, fare entrare una variabile con un indice che non è il minimo, potrebbe portare al rischio di entrare in un ciclo, cioè di riottenere la base di partenza e di continuare a ciclare infinite volte, ma in questo caso dimostrativo non succederà.

Intanto vediamo quant'era il costo ridotto di x_4:

$$\bar{c}_4 = 0 + (-1 \quad -1) \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = -5$$

Faccio entrare in base x_4

Verifica di illimitatezza:

$$\bar{A}_4 = B^{-1} \cdot A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$h = argmin\left\{\frac{4}{2}, \frac{6}{3}\right\} = argmin\{2, 2\} = 1$$

Poiché i minimi sono uguali scelgo quello che mi farà uscire la variabile con indice minimo.

Dato che ho scelto $h = 1$, esce y_1.

Aggiorno la matrice carry:

$$\begin{array}{c|cc|c} -5 & -1 & -1 & -10 \\ \hline 2 & 1 & 0 & 4 \\ 3 & 0 & 1 & 6 \end{array}$$

Diventa:

$$\begin{array}{c|cc|c} 0 & 3/2 & -1 & 0 \\ \hline 1 & 1/2 & 0 & 2 \\ 0 & -3/2 & 1 & 0 \end{array}$$

$$x_B = \begin{pmatrix} x_4 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

La funzione obbiettivo si è annullata (ciò vuol dire che sono nulle le variabili artificiali poiché la loro somma da la funzione obbiettivo stessa). A questo punto mi devo fermare, perché non posso far scendere di più la funzione obbiettivo.

Mi è rimasta in base ancora una variabile artificiale che devo sostituire con una colonna associata ad una delle altre variabili non artificiali fuori base.

Dico che esce y_2

Per scegliere chi entra devo andare a guardare tutte le variabili fuori base e vedere chi ha l'elemento $\bar{a}_{ij} \neq 0$

Nel nostro caso le variabili fuori base sono:

$$x_F = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Quindi mi calcolo $\bar{A}_1, \bar{A}_2, \bar{A}_3$ e vedo chi di questi ha l'elemento$\bar{a}_{2j} \neq 0$ (poiché sto facendo uscire la seconda variabile dal vettore x_B)

$$\bar{A}_1 = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$$

Il secondo elemento è diverso da zero, quindi già ho trovato la colonna giusta, quindi faccio uscire y_2 e faccio entrare x_1.

A questo punto devo aggiornare la matrice carry con un'operazione di pivot degenere.

Mi riscrivo la matrice carry senza contare la prima riga (che tanto non mi interessa) e ci affianco la colonna $\bar{A}_1$:

$$\begin{array}{c|cc|c} & & & 0 \\ \hline 1/2 & 1/2 & 0 & 2 \\ 1/2 & -3/2 & 1 & 0 \end{array}$$

Sapendo che il pivot è l'elemento $\bar{a}_{ij}$, svolgendo le operazioni si otterrà la base aggiornata.

Il vettore x_B rimarrà invariato perciò posso concludere dicendo:

$$x_B = \begin{pmatrix} x_4 \\ x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Esiste ancora un altro possibile caso, quello nel quale rimane una variabile artificiale in base con valore zero e con tutte le variabili fuori base che hanno l'elemento $\bar{a}_{ij} = 0$ (quindi non esiste una variabile giusta con cui sostituire la variabile artificiale). In questo particolare caso, significa che un'equazione nel sistema artificiale è ridondante (ovvero è combinazione lineare delle altre) e perciò la si elimina. L'equazione ridondante è proprio quella dove compare la y rimasta in base e oltre a cancellare la sua equazione dal sistema si cancella la riga e la colonna associate alla variabile y nella matrice carry.

Esempio pratico del terzo caso (è lo stesso sistema di prima ma con un'equazione ridondante):

Parto già con un sistema artificiale:

$$\min y_1 + y_2 + y_3$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 + 2x_4 + y_1 = 4 \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 + 3x_4 + y_2 = 6 \\ 3x_1 + 5x_4 + y_3 = 10 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, y_1, y_2, y_3 \geq 0 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -3 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = B^{-1}$$

$$x_B = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = B^{-1} \cdot b = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 10 \end{pmatrix}$$

$$-\mu^T = -(1 \quad 1 \quad 1) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (-1 \quad -1 \quad -1)$$

$$\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & -1 & -20 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 10 \end{array}$$

Calcolo i costi ridotti:

$$\bar{c}_4 = 0 + (-1 \quad -1 \quad -1) \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} = -10$$

Senza calcolare gli altri faccio subito entrare in base x_4 (poiché è la variabile di indice minimo):

$$\bar{A}_4 = B^{-1} \cdot A_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$h = argmin\left\{\frac{4}{2}, \frac{6}{3}, \frac{10}{5}\right\} = argmin\{2,2,2\} = 2$$

Poiché questo era un vecchio esercizio che il professore fece prima di introdurre la regola di Bland, prese un minimo a caso. In realtà h doveva valere 1 in modo tale che uscisse y_1 che è quella di indice minimo.

Poiché ho scelto 2 esce la seconda variabile di x_B, cioè y_2

Aggiorno la carry:

$$\begin{array}{c|ccc|c} -10 & -1 & -1 & -1 & -20 \\ \hline 2 & 1 & 0 & 0 & 4 \\ 3 & 0 & 1 & 0 & 6 \\ 5 & 0 & 0 & 1 & 10 \end{array}$$

$$\begin{array}{c|ccc|c} 0 & -1 & 7/3 & -1 & 0 \\ \hline 0 & 1 & -2/3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1/3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -5/3 & 1 & 0 \end{array}$$

$$x_B = \begin{pmatrix} y_1 \\ x_4 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Il costo della funzione obbiettivo si è azzerato, perciò mi fermo.

Poiché ci sono ancora delle y in base decido di fare uscire y_1.

Ora cerco chi è che ha il primo elemento diverso da zero (poiché sto facendo uscire la prima variabile dal vettore x_B).

Quindi mi calcolo tutti gli $\bar{A}_j$ delle variabili fuori base.

$$\bar{A}_1 = \begin{pmatrix} 1 & -2/3 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & -5/3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/3 \\ 2/3 \\ -1/3 \end{pmatrix}$$

Poiché il primo elemento è diverso da zero faccio entrare x_1

Aggiorno la carry con il pivot degenere (il pivot è il primo elemento di $\bar{A}_1$ perché è uscita la prima variabile del vettore x_B):

$$\begin{array}{c|ccc|c} & & & & 0 \\ \hline -1/3 & 1 & -2/3 & 0 & 0 \\ 2/3 & 0 & 1/3 & 0 & 2 \\ -1/3 & 0 & -5/3 & 1 & 0 \end{array}$$

Diventa:

$$\begin{array}{c|ccc|c} & & & & 0 \\ \hline 1 & -3 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 0 \end{array}$$

$$x_B = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_4 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ho ancora un y in base perciò faccio uscire y_3.

Cerco tra le variabili fuori base chi ha il terzo elemento diverso da zero:

$$\bar{A}_2 = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\bar{A}_3 = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -15 \\ 9 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Nessuna delle variabili fuori base ha il terzo elemento diverso da zero. Quindi questo mi dice che l'equazione con y_3 è combinazione lineare delle altre, perciò la posso eliminare. Il sistema quindi diventa:

$\min y_1 + y_2$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 + 2x_4 + y_1 = 4 \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 + 3x_4 + y_2 = 6 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, y_1, y_2 \geq 0 \end{cases}$$

Dalla matrice carry elimino l'ultima riga (poiché la variabile y_3 rimasta in base si trova nell'ultima posizione del vettore x_B) e l'ultima colonna. Quindi la carry aggiornata è:

$$\begin{array}{cc|c} & & \\ \hline -3 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 2 \end{array}$$

Quindi ottengo: $x_B = \binom{x_1}{x_4} = \binom{0}{2}$

La soluzione ottenuta è la stessa dell'esempio precedente.

Costruzione problema duale

La costruzione di un problema duale è piuttosto meccanica e questi sono i passi da fare:

Prima di tutto, se ho una funzione obbiettivo minimizzante nel problema primale (ovvero quello originale), avrò una funzione obbiettivo massimizzante. Se nel primale ho una funzione obbiettivo massimizzante, nel duale avrò una funzione obbiettivo minimizzante.

L'argomento della funzione obbiettivo duale è costituito da $\mu^T \cdot b$

Dove b è il vettore dei termini noti del problema primale, mentre u^T è il vettore trasposto di alcuni coefficienti che andrò a moltiplicare a ciascuna riga del problema primale.

Come detto poco sopra, se nel problema primale ho n righe (non contando le disequazioni che mi dicono il segno delle variabili), avrò $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$ coefficienti che moltiplicheranno ciascuna riga.

Queste tabelle (che spiegherò meglio nell'esempio successivo) torneranno molto utili:

Primale	Duale
min	max
$a_i^T \cdot x \geq b_i$	$\mu_i \geq 0$
$a_i^T \cdot x \leq b_i$	$\mu_i \leq 0$
$a_i^T \cdot x = b_i$	$\mu_i \ libera$
$x_j \geq 0$	$\mu^T \cdot A_j \leq c_j$
$x_j \leq 0$	$\mu^T \cdot A_j \geq c_j$
$x_j \ libera$	$\mu^T \cdot A_j = c_j$

Primale	Duale
max	min
$a_i^T \cdot x \geq b_i$	$\mu_i \leq 0$
$a_i^T \cdot x \leq b_i$	$\mu_i \geq 0$
$a_i^T \cdot x = b_i$	$\mu_i \ libera$
$x_j \geq 0$	$\mu^T \cdot A_j \geq c_j$
$x_j \leq 0$	$\mu^T \cdot A_j \leq c_j$
$x_j \ libera$	$\mu^T \cdot A_j = c_j$

Mettiamo, ad esempio, di dover calcolare il duale del seguente problema:

$\min 3x_1 + 2x_2 - x_3$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 4x_3 + x_4 \geq 6 \\ x_1 + x_2 - x_3 - x_4 \leq 7 \\ x_2 + x_3 + 2x_4 = 5 \\ x_1 \geq 0, \;\; x_4 \geq 0, \;\; x_2 \leq 0 \\ x_3 \; libera \end{cases}$$

Dire che x_3 è libera significa dire che può essere sia positiva che negativa.

Le equazioni del sistema che dovrò moltiplicare per dei coefficienti sono le prime 3, quelle che mi indicano i segni delle variabili le ignoro. Quindi avrò tre coefficienti moltiplicativi: $\mu_1, \; \mu_2$ e μ_3.

Come detto sopra, per trasformarlo in duale, la funzione minimizzante diventa massimizzante e moltiplico il vettore dei termini noti per il vettore trasposto dei coefficienti μ, quest'ultimo lo andrò a moltiplicare alle righe in un secondo momento:

$$(\mu_1 \quad \mu_2 \quad \mu_3) \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix} = 6\mu_1 + 7\mu_2 + 5\mu_3$$

Quindi come funzione obbiettivo avrò: $\max 6\mu_1 + 7\mu_2 + 5\mu_3$

Adesso devo scrivere le equazioni/disequazioni del sistema duale.

Un metodo rapido per scrivere il sistema, consiste nel moltiplicare, di volta in volta, il vettore dei coefficienti μ^T per una colonna dei coefficienti del sistema primale.

Quindi, prendo la prima colonna dei coefficienti del sistema primale, cioè: $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

La moltiplico con il vettore dei coefficienti:

$$(\mu_1 \quad \mu_2 \quad \mu_3) \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 2\mu_1 + \mu_2$$

Ora, poiché ho usato la prima colonna del problema primale, ciò vuol dire che sto costruendo la prima riga del problema duale. Guardo la tabella scritta precedentemente (in particolare mi interessa la prima, poiché la funzione obbiettivo del problema primale era minimizzante), per vedere che segno dare alla prima disequazione del problema duale. Grazie alla tabella, posso vedere che il segno della prima disequazione mi è dato dall'opposto del segno della variabile x di indice j (che nel nostro caso corrisponde a 1). Come secondo membro dell'equazione avrò il costo di x_1 (poiché sto lavorando sulla riga di indice 1 del problema duale, o in altre parole, perché sto lavorando con la prima colonna della matrice dei coefficienti del primale), cioè il coefficiente di x_1 nella funzione obbiettivo primale.

Quindi la prima disequazione del sistema duale sarà:

$2\mu_1 + \mu_2 \leq 3$

Ora, per trovare la seconda disequazione, moltiplico il vettore dei coefficienti μ^T per la seconda colonna della matrice dei coefficienti del problema primale:

$$(\mu_1 \quad \mu_2 \quad \mu_3) \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = -\mu_1 + \mu_2 + \mu_3$$

Il segno è l'opposto di quello della variabile con indice pari alla colonna presa in considerazione, quindi il segno è l'opposto di x_2. Come secondo membro, metto il costo di x_2:

$$-\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 \geq 2$$

Ora moltiplico per la terza colonna dei coefficienti:

$$(\mu_1 \quad \mu_2 \quad \mu_3) \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = 4\mu_1 - \mu_2 + \mu_3$$

Poiché x_3 è libera, cioè può essere sia positiva che negativa, la tabella ci dice di mettere l'uguale. Al secondo membro metto il costo di x_3:

$$4\mu_1 - \mu_2 + \mu_3 = -1$$

Moltiplico μ^T per la quarta colonna:

$$(\mu_1 \quad \mu_2 \quad \mu_3) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \mu_1 - \mu_2 + 2\mu_3$$

Metto il segno opposto di x_4 e il suo costo al secondo membro:

$$\mu_1 - \mu_2 + 2\mu_3 \leq 0$$

Ora devo stabilire i segni delle varie μ. Questo è possibile sempre grazie alla tabella.

Poiché la prima disequazione del problema primale è positiva allora μ_1 è positiva.

Poiché la seconda disequazione del problema primale è negativa allora μ_2 è negativa.

Poiché la terza è un'equazione allora μ_3 è libera.

Dunque, riunendo i pezzi, il problema duale è:

$$\max 6\mu_1 + 7\mu_2 + 5\mu_3$$

$$\begin{cases} 2\mu_1 + \mu_2 \leq 3 \\ -\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 \geq 2 \\ 4\mu_1 - \mu_2 + \mu_3 = -1 \\ \mu_1 - \mu_2 + 2\mu_3 \leq 0 \\ \mu_1 \geq 0, \;\; \mu_2 \leq 0 \\ \mu_3 \; libera \end{cases}$$

Si può notare che ho ottenuto quattro righe (non contando le disequazioni che mi danno il segno alle μ) perché nella matrice dei coefficienti del problema primale avevo quattro colonne, in altre parole perché avevo quattro x. Nel problema duale ho tre variabili μ, perché nel problema primale avevo tre righe.

Altro esempio (questa volta considererò la tabella di destra perché passo da max a min):

$\max 2x_1 - 3x_2$

$$\begin{cases} 4x_1 + x_2 + x_3 \geq 6 \\ 2x_2 - x_3 \leq 3 \\ x_1 \ libera \\ x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

Il suo problema duale è:

$\min 6\mu_1 + 3\mu_2$

$$\begin{cases} 4\mu_1 = 2 \\ \mu_1 + 2\mu_2 \geq -3 \\ \mu_1 - \mu_2 \geq 0 \\ \mu_1 \leq 0 \\ \mu_2 \geq 0 \end{cases}$$

Nota teorica:

Se il problema primale ha soluzione ottima, anche il duale ha soluzione ottima.

Se il problema primale è illimitato, allora il duale sarà impossibile.

Se il problema primale è impossibile, allora il duale sarà o illimitato o impossibile.

Esercizio d'esame maggio 2000 (Compito A – esercizio 4)

L'esercizio chiedeva di trovare, con il metodo del simplesso (usando variabili artificiali), una soluzione ammissibile per il seguente problema di programmazione lineare:

$$\begin{cases} 4x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 6 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 - 2x_4 = 3 \\ -2x_1 + x_2 + 2x_3 = 4 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{cases}$$

Il problema non ha una funzione obbiettivo quindi la soluzione non è vincolata da tale funzione e perciò va bene qualsiasi soluzione.

Facendo la matrice dei coefficienti ci si può accorgere che mancano le colonne della matrice di identità, perciò le aggiungo artificialmente inserendo tre nuove variabili.

$\min y_1 + y_2 + y_3$

$$\begin{cases} 4x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 + y_1 = 6 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 - 2x_4 + y_2 = 3 \\ -2x_1 + x_2 + 2x_3 + y_3 = 4 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, y_1, y_2, y_3 \geq 0 \end{cases}$$

La base che andrò a scegliere sarà quindi quella associata alle colonne dei coefficienti di y_1, y_2 e y_3 (cioè l'identità).

Ora faccio i soliti passaggi per costruire la carry:

$$x_B = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = B^{-1} \cdot b = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$-\mu^T = -(1 \quad 1 \quad 1) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (-1 \quad -1 \quad -1)$$

$$-\mu^T \cdot b = (-1 \quad -1 \quad -1) \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = -13$$

$$\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & -1 & -13 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}$$

$$\bar{c}_1 = 0 + (-1 \quad -1 \quad -1) \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = -3$$

Faccio entrare in base x_1:

$$\bar{A}_1 = B^{-1} \cdot A_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$h = argmin \left\{ \frac{6}{4}, 3, \cdot \right\} = 1$$

Quindi esce y_1

Aggiorno la carry (il pivot è 4):

$$\begin{array}{c|ccc|c} -3 & -1 & -1 & -1 & -13 \\ \hline 4 & 1 & 0 & 0 & 6 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ -2 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}$$

$$\begin{array}{c|ccc|c} 0 & -1/4 & -1 & -1 & -17/2 \\ \hline 1 & 1/4 & 0 & 0 & 3/2 \\ 0 & -1/4 & 1 & 0 & 3/2 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1 & 7 \end{array}$$

$$x_B = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/2 \\ 3/2 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$\bar{c}_2 = 0 + (-1/4 \quad -1 \quad -1) \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = -\frac{11}{4}$$

$$\bar{c}_3 = 0 + (-1/4 \quad -1 \quad -1) \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = -\frac{3}{2}$$

In questo esercizio non era richiesto di usare la regola di Bland e poiché quando l'ho fatto ancora non la conoscevo, ho scelto $\bar{c}_3$ anziché il costo ridotto di indice minimo $\bar{c}_2$ (che invece è quello più corretto per non incappare in un ciclo).

Perciò faccio entrare x_3 in base (avrei potuto benissimo far entrare x_2 tanto alla fine devo arrivare sempre allo stesso risultato).

$$\bar{A}_3 = \begin{pmatrix} 1/4 & 0 & 0 \\ -1/4 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ -3/2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$h = argmin\left\{3, \cdot, \frac{7}{3}\right\} = 3$$

Esce y_3

$$\begin{array}{c|ccc|c} -3/2 & -1/4 & -1 & -1 & -17/2 \\ \hline 1/2 & 1/4 & 0 & 0 & 3/2 \\ -3/2 & -1/4 & 1 & 0 & 3/2 \\ 3 & 1/2 & 0 & 1 & 7 \end{array}$$

$$\begin{array}{c|ccc|c} 0 & 0 & -1 & -1/2 & -10/2 \\ \hline 0 & 1/6 & 0 & -1/6 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 & 5 \\ 1 & 1/6 & 0 & 1/3 & 7/3 \end{array}$$

$$x_B = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 5 \\ 7/3 \end{pmatrix}$$

$$\bar{c}_2 = 0 + (0 \quad -1 \quad -1/2) \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = -\frac{5}{2}$$

Entra x_2 in base

$$\bar{A}_2 = \begin{pmatrix} 1/6 & 0 & -1/6 \\ 0 & 1 & 1/2 \\ 1/6 & 0 & 1/3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/3 \\ 5/2 \\ 1/6 \end{pmatrix}$$

$$h = argmin\{\cdot, 2, 14\} = 2$$

Esce y_2 dalla base

$-5/2$	0	-1	$-1/2$	$-10/2$
$-1/3$	$1/6$	0	$-1/6$	$1/3$
$5/2$	0	1	$1/2$	5
$1/6$	$1/6$	0	$1/3$	$7/3$

0	0	0	0	0
0	$1/6$	$2/15$	$-1/10$	1
1	0	$2/5$	$1/5$	2
0	$1/6$	$-1/15$	$3/10$	2

$$x_B = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Poiché il costo della funzione obbiettivo si è annullato mi fermo.

Ripassando al problema principale ho:

$x_F = (x_4) = 0$

$$x_B = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

E poiché x_B è maggiore o uguale a zero ciò significa che è una soluzione base ammissibile, perciò il problema è risolto.

Esercizio d'esame maggio 2000 (Compito D – esercizio 2)

In quest'esercizio era richiesto di risolvere il seguente problema in forma grafica:

$\min 2x_1 + x_2$

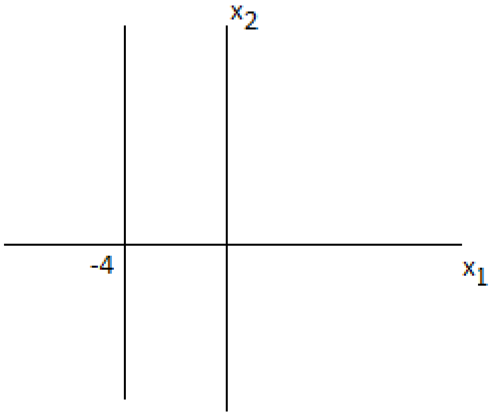
$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \geq 6 \\ 4x_1 - x_2 \leq 10 \\ x_1 - 3x_2 \leq 12 \\ \quad x_1 \geq -4 \end{cases}$$

Adesso prendo una di queste disequazioni e la trasformo in un'equazione:

Prendo: $x_1 \geq -4$

Che diventa: $x_1 = -4$

E traccio questa retta sul grafico:

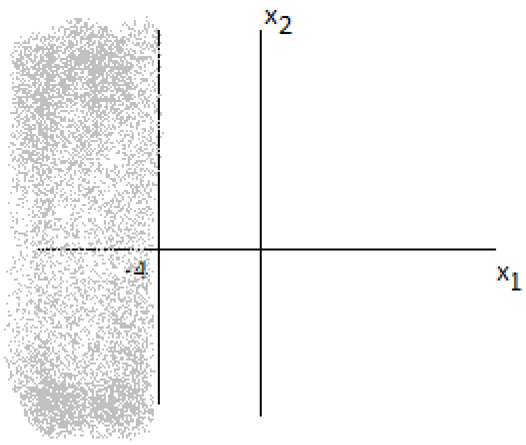


Per vedere qual è il semispazio che soddisfa la disequazione di partenza ($x_1 \geq -4$) basta che prendo un punto di uno dei due semispazi e lo metto nella disequazione per vedere se la soddisfa o meno (si può dimostrare che il risultato ottenuto per quel punto varrà anche per tutti gli altri punti di quel semispazio).

Per comodità scelgo l'origine, perciò sostituisco le coordinate dell'origine nella disequazione:

$0 \geq -4$

La disequazione è soddisfatta per l'origine, ciò significa che anche gli altri punti del semispazio di destra soddisferanno la disequazione e quindi cancello il semispazio di sinistra (colorandola di grigio):



Ora faccio lo stesso procedimento con le altre disequazioni.

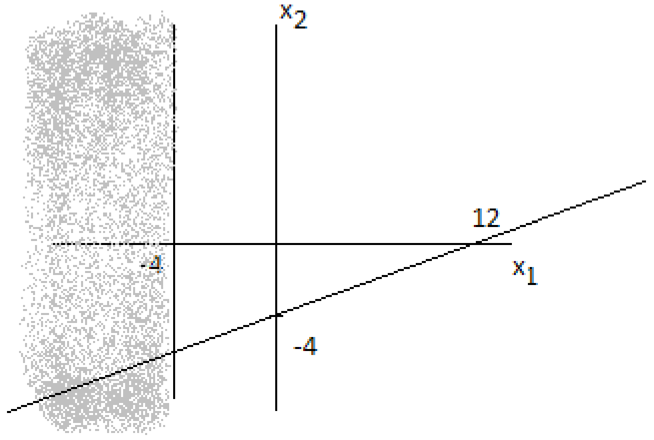
$x_1 - 3x_2 \leq 12$ la faccio diventare $x_1 - 3x_2 = 12$

Per trovare due punti della retta facilmente (in modo da tracciarla) pongo nulle prima una variabile e poi l'altra.

Se $x_1 = 0$ allora $x_2 = \frac{12}{-3} = -4$

Se $x_2 = 0$ allora $x_1 = 12$

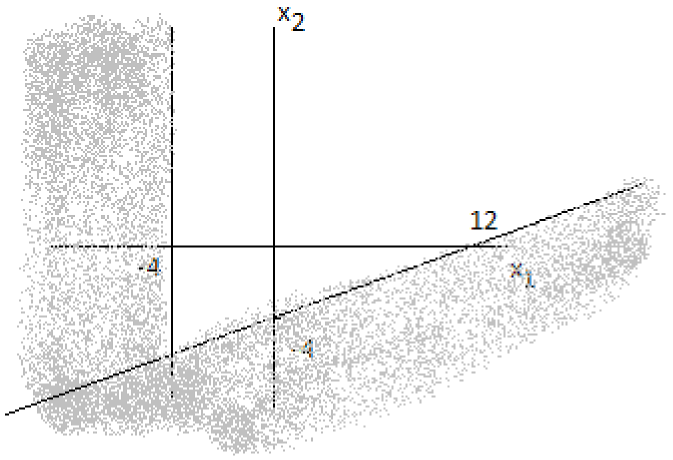
Traccio la retta:



Verifico se l'origine soddisfa la disequazione:

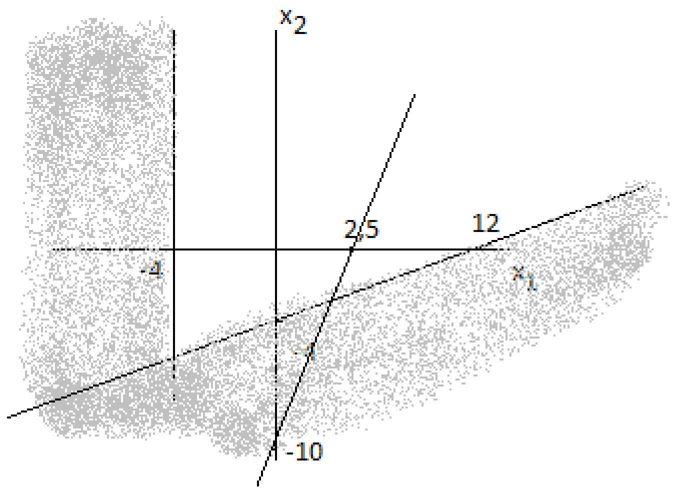
$0 - 3 \cdot 0 \leq 12 \;\; \rightarrow \;\; 0 \leq 12$

Poiché è verificata cancello il semispazio che non contiene l'origine:



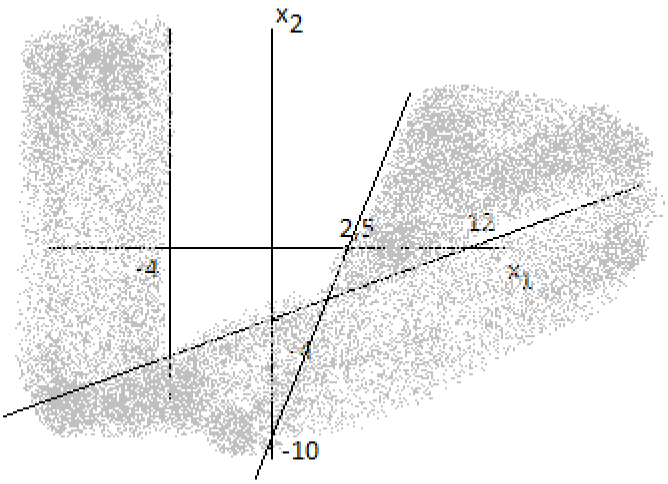
Stessa cosa per $4x_1 - x_2 \leq 10$ che diventa $4x_1 - x_2 = 10$

Se $x_1 = 0$ allora $x_2 = -10$ e se $x_2 = 0$ allora $x_1 = \frac{10}{4} = \frac{5}{2} = 2{,}5$

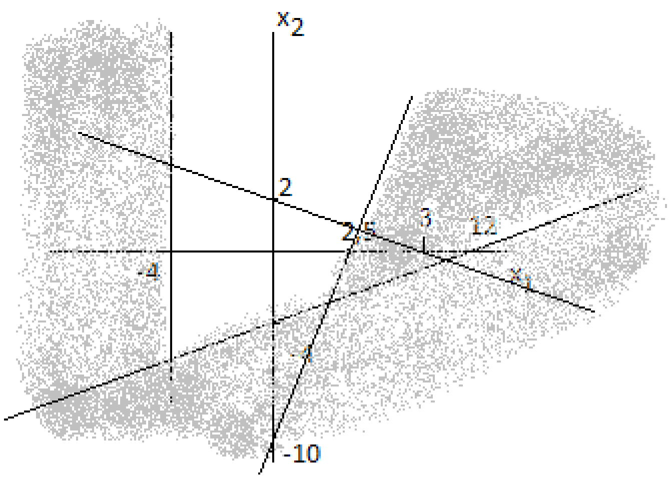


Sostituisco l'origine: $0 - 0 \leq 10$

Cancello il semispazio di destra:



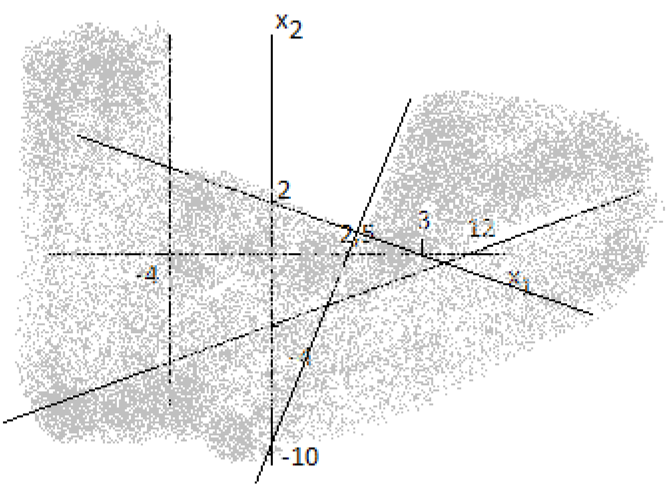
Se $x_1 = 0$ allora $x_2 = \frac{6}{3} = 2$ e se $x_2 = 0$ allora $x_1 = \frac{6}{2} = 3$



Verifico se l'origine va bene:

$0 + 0 \geq 6$

In questo caso l'origine fa parte del semispazio che deve essere cancellato poiché non soddisfa la disequazione:



Adesso devo trovare la soluzione ottima (cioè quella soluzione che rende minimo il costo della funzione obbiettivo). C'è un teorema che mi dice che la soluzione ottima si trova su un vertice (a parte quando il problema è illimitato inferiormente). In questo caso abbiamo due vertici, uno dei due rappresenta la soluzione ottima.

Trovo le coordinate dei due vertici mettendo a sistema le equazioni delle rette (ne bastano due) che li individuano.

Calcolo le coordinate del vertice più a destra:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 6 \\ 4x_1 - x_2 = 10 \end{cases}$$

Risolvendo il sistema ottengo:

$$x_1 = \frac{18}{7} \qquad x_2 = \frac{2}{7}$$

Calcolo le coordinate del vertice più a sinistra:

$$\begin{cases} x_1 = -4 \\ 2x_1 + 3x_2 = 6 \end{cases}$$

$$x_1 = -4 \qquad x_2 = \frac{14}{3} = 4{,}67$$

Sostituisco nella funzione obbiettivo le coordinate dei due vertici e vedo qual è quello che la rende minima:

$$2x_1 + x_2 = 2 \cdot \frac{18}{7} + \frac{2}{7} = 5{,}43$$

$$2x_1 + x_2 = 2 \cdot -4 + \frac{14}{3} = -3{,}33$$

Quindi il secondo vertice, cioè quello più a sinistra nel grafico, costituisce la soluzione ottima del problema.

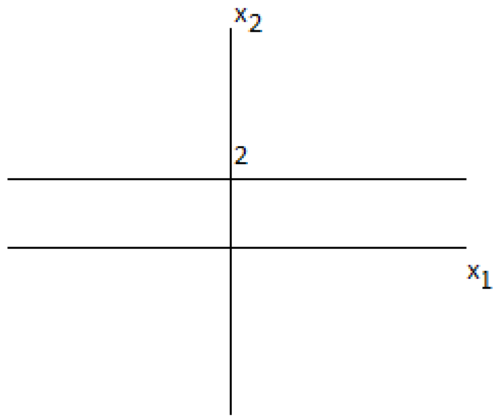
Esercizio d'esame febbraio 2001 (Compito A – esercizio 2)

In quest'esercizio era richiesto di risolvere il seguente problema in forma grafica:

$$\min x_1 + 2x_2$$

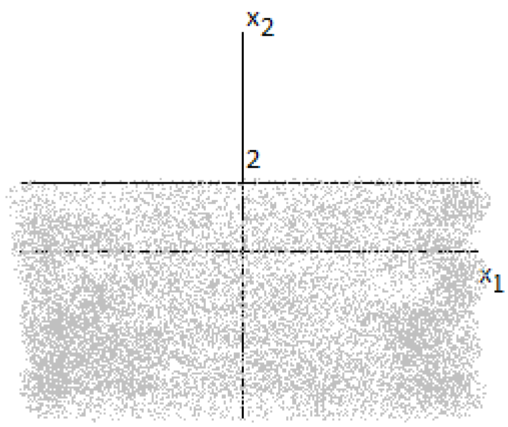
$$\begin{cases} x_1 - x_2 \geq -5 \\ x_1 + 2x_2 \leq 18 \\ 2x_1 - x_2 \leq 8 \\ x_2 \geq 2 \end{cases}$$

Rieseguo gli stessi passi dell'esercizio precedente, parto da $x_2 \geq 2$ perché è più semplice:



Sostituisco l'origine: $0 \geq 2$

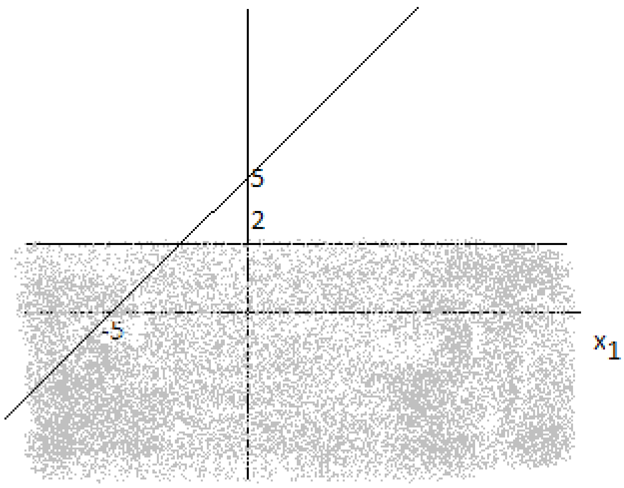
Poiché la disequazione non è soddisfatta per l'origine cancello il semispazio a cui appartiene:



$x_1 - x_2 \geq -5 \rightarrow x_1 - x_2 = -5$

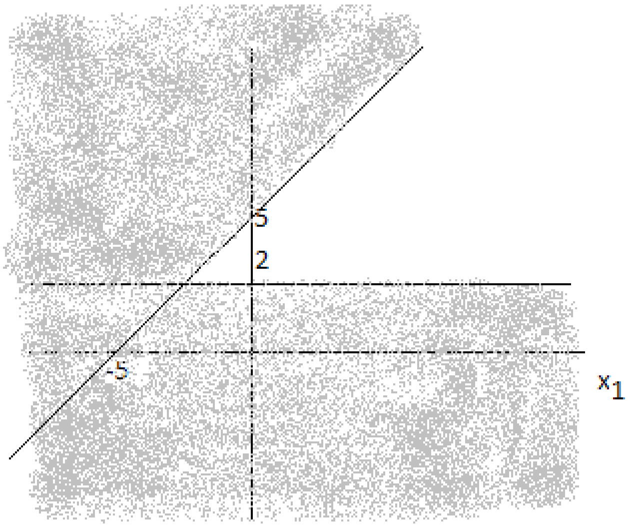
Se $x_1 = 0$ allora $x_2 = 5$

Se $x_2 = 0$ allora $x_1 = -5$



Mi regolo sempre con l'origine per capir stra della nuova retta che ho tracciato:

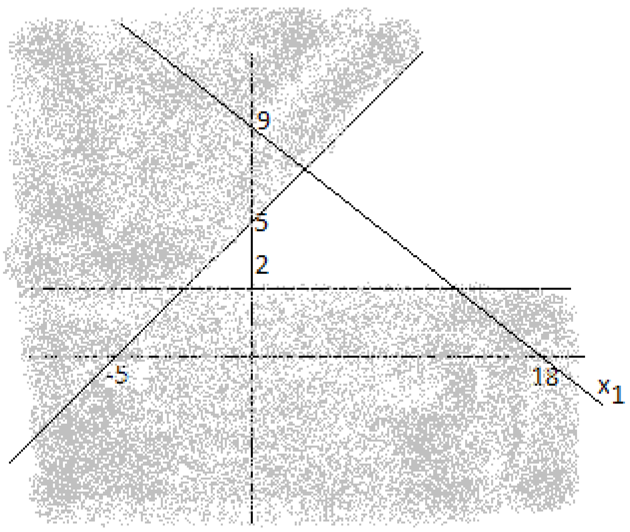
$0 - 0 \geq -5$



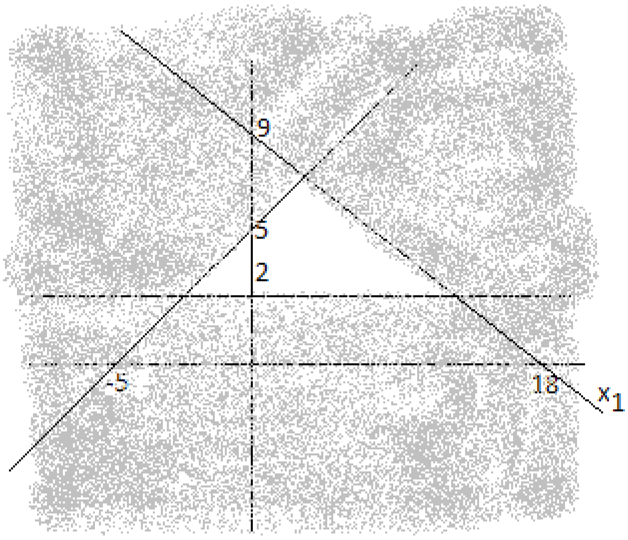
$x_1 + 2x_2 \leq 18 \ \rightarrow x_1 + 2x_2 = 18$

Se $x_1 = 0$ allora $x_2 = 9$

Se $x_2 = 0$ allora $x_1 = 18$



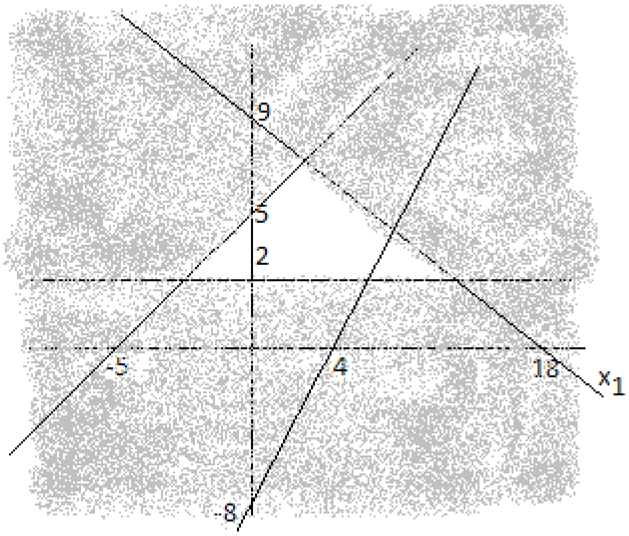
$0 + 0 \leq 18$



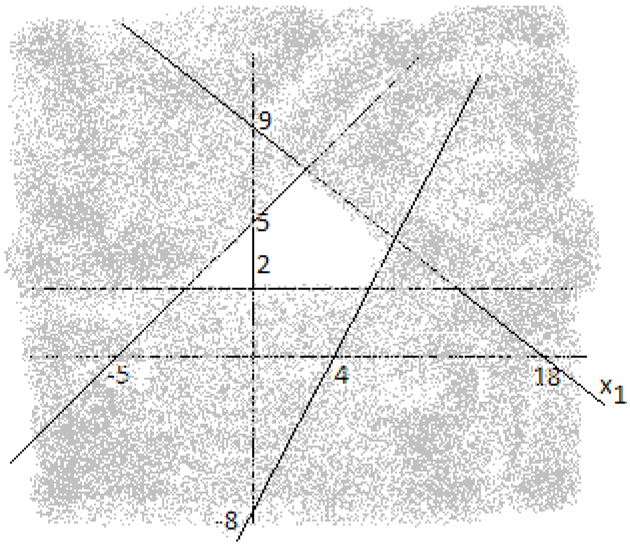
$2x_1 - x_2 \leq 8 \rightarrow 2x_1 - x_2 = 8$

Se $x_1 = 0$ allora $x_2 = -8$

Se $x_2 = 0$ allora $x_1 = 4$



$0 - 0 \leq 8$



A questo punto mi dovrei calcolare i quattro vertici e vedere qual è il vertice che fa abbassare di più la funzione obbiettivo sostituendoci le coordinate.

La funzione obbiettivo è $x_1 + 2x_2$ quindi so che x_2 ha costo doppio rispetto x_1 (cioè conta di più). Perciò per fare prima prendo solo i vertici che hanno un valore di x_2 basso.

A questo punto mi rimangono i due vertici in basso (per i quali x_2 ha lo stesso costo), ma x_1 è più piccolo nel vertice di sinistra, quindi ho trovato il vertice ottimo (per il quale la funzione obbiettivo ha costo minimo).

Quindi me lo calcolo incrociando le rette:

$$\begin{cases} x_2 = 2 \\ x_1 - x_2 = -5 \end{cases}$$

$x_1 = -3 \quad x_2 = 2$

Esercizio d'esame novembre 2006 (Compito A – esercizio 2)

Nell'esercizio veniva richiesto di risolvere con il simplesso il seguente problema lineare:

$\max 3x_2 + 2x_3$

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 = 12 \\ x_1 - 3x_2 + x_3 + 2x_4 = 8 \\ x_1 - x_2 + x_4 = 5 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{cases}$$

Prima di tutto, porto il problema in forma standard. In questo caso l'unica cosa da cambiare è trasformare la funzione obbiettivo da massimizzante a minimizzante (cambiando i segni).

Quindi ottengo:

$\min -3x_2 - 2x_3$

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 = 12 \\ x_1 - 3x_2 + x_3 + 2x_4 = 8 \\ x_1 - x_2 + x_4 = 5 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{cases}$$

Se si fa la matrice dei coefficienti, si può notare che non c'è una matrice di identità da cui partire, perciò aggiungo tre variabili artificiali. Il problema artificiale diventa:

$\min y_1 + y_2 + y_3$

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 + y_1 = 12 \\ x_1 - 3x_2 + x_3 + 2x_4 + y_2 = 8 \\ x_1 - x_2 + x_4 + y_3 = 5 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, y_1, y_2, y_3 \geq 0 \end{cases}$$

Matrice dei coefficienti:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Quindi scelgo come base la sottomatrice formata dalle colonne associate a y_1, y_2, y_3

$$x_B = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = B^{-1} \cdot b = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 12 \\ 8 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 8 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Poiché $x_B \geq 0$ ho trovato una soluzione base ammissibile.

$-\mu^T = -c_B^T \cdot B^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

$-\mu^T \cdot b = -25$

Verifico se la SBA corrente è ottima:

$$\bar{c}_1 = 0 + (-1 \quad -1 \quad -1) \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = -5$$

Entra x_1

Test di illimitatezza:

$$\bar{A}_1 = B^{-1} \cdot A_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$h = argmin\left\{\frac{12}{3}, 8{,}5\right\} = 1$$

Esce y_1

Costruisco e aggiorno la carry:

$$\begin{array}{c|ccc|c} -5 & -1 & -1 & -1 & -25 \\ \hline 3 & 1 & 0 & 0 & 12 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 8 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{array}$$

$$\begin{array}{c|ccc|c} 0 & 2/3 & -1 & -1 & -5 \\ \hline 1 & 1/3 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & -1/3 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & -1/3 & 0 & 1 & 1 \end{array}$$

$$x_B = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\bar{c}_2 = 0 + (2/3 \quad -1 \quad -1) \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{10}{3}$$

$$\bar{c}_3 = 0 + (2/3 \quad -1 \quad -1) \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = -\frac{5}{3}$$

Entra x_3

$$\bar{A}_3 = \begin{pmatrix} 1/3 & 0 & 0 \\ -1/3 & 1 & 0 \\ -1/3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/3 \\ 4/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}$$

$$h = argmin\{\cdot, 3{,}3\} = 2$$

esce y_2

Aggiorno la carry:

$$\begin{array}{c|ccc|c} -5/3 & 2/3 & -1 & -1 & -5 \\ \hline -1/3 & 1/3 & 0 & 0 & 4 \\ 4/3 & -1/3 & 1 & 0 & 4 \\ 1/3 & -1/3 & 0 & 1 & 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{c|ccc|c} 0 & 1/4 & 1/4 & -1 & 0 \\ \hline 0 & 1/4 & 1/4 & 0 & 5 \\ 1 & -1/4 & 3/4 & 0 & 3 \\ 0 & -1/4 & -1/4 & 1 & 0 \end{array}$$

$$x_B = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_3 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Il problema artificiale è finito poiché il costo della funzione obbiettivo si è annullato.

Una variabile artificiale mi è rimasta in base perciò ora controllo se la posso sostituire con qualche altra variabile x.

Controllo se la posso sostituire con x_2

$$\bar{A}_2 = \begin{pmatrix} 1/4 & 1/4 & 0 \\ -1/4 & 3/4 & 0 \\ -1/4 & -1/4 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Poiché devo sostituire la terza variabile in base, verifico se il terzo elemento di $\bar{A}_2$ sia diverso da zero. In questo caso è zero, perciò non posso sostituire y_3 con x_2.

Controllo x_4

$$\bar{A}_4 = \begin{pmatrix} 1/4 & 1/4 & 0 \\ -1/4 & 3/4 & 0 \\ -1/4 & -1/4 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Anche x_4 non va bene.

A questo punto ho controllato tutte le x e la variabile y mi è rimasta in base. Ciò significa che l'equazione contenente y_3 è ridondante e la cancello dal sistema (cancellando anche la riga e la colonna associate a y_3 nella carry).

Cancello la terza riga e la terza colonna dalla carry:

$$\begin{array}{cc|c} 1/4 & 1/4 & 0 \\ \hline 1/4 & 1/4 & 5 \\ -1/4 & 3/4 & 3 \end{array}$$

$$x_B = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Ripasso al problema originale (eliminando l'equazione ridondante):

$\min -3x_2 - 2x_3$

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 = 12 \\ x_1 - 3x_2 + x_3 + 2x_4 = 8 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{cases}$$

Mi ricalcolo $-\mu^T$ e $-\mu^T \cdot b$ poiché la funzione obbiettivo è cambiata:

$$-\mu^T = -(0 \quad -2) \cdot \begin{pmatrix} 1/4 & 1/4 \\ -1/4 & 3/4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

$$-\mu^T \cdot b = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 12 \\ 8 \end{pmatrix} = 6$$

Quindi la carry è:

$$\begin{array}{cc|c} -1/2 & 3/2 & 6 \\ \hline 1/4 & 1/4 & 5 \\ -1/4 & 3/4 & 3 \end{array}$$

Verifico se la SBA corrente è ottima:

$$\bar{c}_2 = -3 + \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix} = -7$$

Entra x_2

$$\bar{A}_2 = \begin{pmatrix} 1/4 & 1/4 \\ -1/4 & 3/4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Poiché $\bar{A}_2$ ha tutti gli elementi minori o uguali a zero il problema è illimitato inferiormente.

Esercizio d'esame giugno 2007 (Compito A – esercizio 2)

Risolvere con il simplesso:

$\min -2x_1 + 3x_2$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 \leq 3 \\ x_1 - x_2 \geq 2 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \leq 0 \end{cases}$$

Porto il problema in forma standard:

Poiché tutte le variabili devono essere positive, pongo: $\bar{x}_2 = -x_2$

min $-2x_1 - 3\bar{x}_2$

$$\begin{cases} x_1 + 2\bar{x}_2 + x_3 = 3 \\ x_1 + \bar{x}_2 - x_4 = 2 \\ x_1, \bar{x}_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{cases}$$

Aggiungo variabile artificiale:

min y_1

$$\begin{cases} x_1 + 2\bar{x}_2 + x_3 = 3 \\ x_1 + \bar{x}_2 - x_4 + y_1 = 2 \\ x_1, \bar{x}_2, x_3, x_4, y_1 \geq 0 \end{cases}$$

$$x_B = \begin{pmatrix} x_3 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$-\mu^T = (0 - 1)$$

$$-\mu^T \cdot b = -2$$

$$\bar{c}_1 = 0 + (0 - 1) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = -1$$

Entra x_1

$$\bar{A}_1 = B^{-1} \cdot A_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$h = argmin\{3,2\} = 2$$

Esce y_1

-1	0	-1	-2
1	1	0	3
1	0	1	2

0	0	0	0
0	1	-1	1
1	0	1	2

$$x_B = \begin{pmatrix} x_3 \\ x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Passo al problema originale:

$$-\mu^T = -(0 \quad -2) \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = (0 \quad 2)$$

$$-\mu^T \cdot b = 4$$

$$\bar{c}_{\bar{2}} = -3 + (0 \quad 2) \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = -1$$

Entra $\bar{x}_2$

$$\bar{A}_{\bar{2}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$h = argmin\{1,2\} = 1$

Esce x_3

$$\begin{array}{c|cc|c} -1 & 0 & 2 & 4 \\ \hline 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{array}$$

$$\begin{array}{c|cc|c} 0 & 1 & 1 & 5 \\ \hline 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \end{array}$$

$$x_B = \begin{pmatrix} \bar{x}_2 \\ x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\bar{c}_3 = 0 + (1 \quad 1) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 2$$

$$\bar{c}_4 = 0 + (1 \quad 1) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = -1$$

Entra x_4

$$\bar{A}_4 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$h = argmin\{1,\cdot\} = 1$

Esce $\bar{x}_2$

$$\begin{array}{c|cc|c} -1 & 1 & 1 & 5 \\ \hline 1 & 1 & -1 & 1 \\ -2 & -1 & 2 & 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{c|cc|c} 0 & 2 & 0 & 6 \\ \hline 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \end{array}$$

$$x_B = \begin{pmatrix} x_4 \\ x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\bar{c}_{\bar{2}} = -3 + (2 \quad 0) \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 1$$

$$\bar{c}_3 = 0 + (2 \quad 0) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 2$$

Poiché tutti i costi ridotti sono maggiori o uguale a zero la soluzione base ammissibile corrente è ottima.

Poiché $\bar{x}_2 = 0$ allora $x_2 = -\bar{x}_2 = 0$

Soluzione:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$