

MATEMATICA C³-ALGEBRA 2

6. EQUAZIONI CON MODULI E IRRAZIONALI



Sails by Cseward

<http://www.flickr.com/photos/cseward/2823465045>

Licenza Attribution-NonCommerical-NoDerivs 2.0

1. EQUAZIONI CON VALORI ASSOLUTI.....	2
▶ 1. Valore assoluto.....	2
▶ 2. Equazioni in una incognita in valore assoluto.....	
▶ 3. Equazioni con più espressioni in valore assoluto.....	7
2. EQUAZIONI IRRAZIONALI.....	10
▶ 1. Equazioni con un solo radicale.....	10
▶ 2. Equazioni con due radicali.....	13
▶ 3. Equazioni che contengono due radicali e altri termini.....	15

1. EQUAZIONI CON VALORI ASSOLUTI

► 1. Valore assoluto

Il valore assoluto o modulo di un numero a , indicato con $|a|$, è lo stesso numero se a è maggiore o uguale a zero, il suo opposto, cioè $-a$, se a è minore di zero.

$$|a| = \begin{cases} a & \text{se } a \geq 0 \\ -a & \text{se } a < 0 \end{cases}$$

Così per esempio $|+7| = 7$; $|-3| = -(-3) = 3$

Nello stesso modo possiamo definire il valore assoluto di una espressione algebrica.

Il valore assoluto o modulo dell'espressione algebrica $A = x^2 - 3x$, indicato con $|x^2 - 3x|$, è una funzione definita per casi, cioè definita da espressioni diverse su sottoinsiemi diversi del dominio,

precisamente: $f(x) = |x^2 - 3x| = \begin{cases} x^2 - 3x & \text{se } x^2 - 3x \geq 0 \\ -(x^2 - 3x) & \text{se } x^2 - 3x < 0 \end{cases}$;

risolvendo la disequazione $x^2 - 3x \geq 0$ si determinano i due sottoinsiemi in cui sono definite le due espressioni algebriche. Otteniamo dunque

$$f(x) = |x^2 - 3x| = \begin{cases} x^2 - 3x & \text{se } x \leq 0 \vee x \geq 3 \\ -(x^2 - 3x) & \text{se } 0 < x < 3 \end{cases}$$

In generale la funzione valore assoluto di un'espressione algebrica, detta **argomento del valore assoluto**, viene esplicitata nei due casi generati dallo studio del segno dell'argomento:

$$|g(x)| = \begin{cases} g(x) & \text{se } g(x) \geq 0 \\ -g(x) & \text{se } g(x) < 0 \end{cases}$$

1 Per la funzione $f(x) = |\sqrt{3} + 3x|$ trovate le espressioni algebriche che descrivono i due casi, ciascuno con il suo dominio.

- Strategia risolutiva. Per la definizione si ha:

$$f(x) = |\sqrt{3} + 3x| = \begin{cases} \sqrt{3} + 3x & \text{se } \dots \dots \dots \rightarrow x \geq \dots \dots \\ \dots \dots \dots & \text{se } \sqrt{3} + 3x < 0 \rightarrow x < \dots \dots \end{cases}$$

Scrivi l'espressione algebrica che descrive i due casi della funzione, ciascuno con il suo dominio

2 $f(x) = |-2x + 5|$

$f(x) = |x - 1|$

3 $f(x) = |-x^2 + 4|$

$f(x) = |x^2 + 1|$

4 $f(x) = |x^2 - 3x + 1|$

$f(x) = |3x - 4|$

5 $f(x) = |x^3 - x|$

$f(x) = |x^2 + x + 1|$

6 $f(a) = |2a - 2|$

$f(p) = \left| 3p^2 - \frac{1}{2} \right|$

7 $f(x) = |-x|$

$f(a) = |-2a^2 - 1|$

8 $f(x) = \left| \frac{1}{x} \right|$

$f(x) = \left| \frac{1}{x^2} \right|$

9 $f(x) = \left| \frac{2x}{x-2} \right|$

$f(x) = \left| \frac{x+1}{2x-1} \right|$

► 2. Equazioni in una incognita in valore assoluto

Equazioni con valore assoluto del tipo $|f(x)|=k$ con $k \in \mathbb{R} \wedge k \geq 0$

L'incognita è presente solo all'interno del modulo.

Esempi

■ $|x^2 - 7| = 3$

Impostiamo la ricerca delle soluzioni con il metodo generale.

$$\begin{cases} x^2 - 7 \geq 0 \\ x^2 - 7 = 3 \end{cases} \cup \begin{cases} x^2 - 7 < 0 \\ -x^2 + 7 = 3 \end{cases} \quad \text{Se moltiplichiamo per } -1 \text{ l'equazione del secondo sistema otteniamo:}$$

$$\begin{cases} x^2 - 7 \geq 0 \\ x^2 - 7 = 3 \end{cases} \cup \begin{cases} x^2 - 7 < 0 \\ x^2 - 7 = -3 \end{cases} \quad \text{in cui le condizioni definite dalle disequazioni vengono in entrambi i casi}$$

soddisfatte, possiamo quindi non effettuare la verifica delle soluzioni.

Conclusioni

L'equazione $|x^2 - 7| = 3$ si risolve unendo l'Insieme Soluzione delle equazioni $(x^2 - 7 = 3) \vee (x^2 - 7 = -3)$.

$$x^2 - 7 = 3 \rightarrow x^2 = 10 \rightarrow x_1 = -\sqrt{10} \vee x_2 = \sqrt{10}$$

$$x^2 - 7 = -3 \rightarrow x^2 = 4 \rightarrow x_3 = -2 \vee x_4 = 2$$

Per cui l'Insieme Soluzione di $|x^2 - 7| = 3$ è $\{-\sqrt{10}, \sqrt{10}, -2, +2\}$

■ $|x^2 - x| = 1$

L'equazione $|x^2 - x| = 1$ si risolve unendo gli insiemi soluzione delle equazioni $x^2 - x = 1$ e $x^2 - x = -1$ senza effettuare la verifica delle soluzioni.

$$x^2 - x = 1 \rightarrow x^2 - x - 1 = 0 \rightarrow x_1 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \vee x_2 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

$$x^2 - x = -1 \rightarrow x^2 - x + 1 = 0 \rightarrow \Delta < 0 \rightarrow \emptyset$$

Per cui l'Insieme Soluzione di $|x^2 - x| = 1$ è $\left\{ \frac{1 - \sqrt{5}}{2}, \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right\}$

Procedura risolutiva

Per risolvere un'equazione del tipo $|f(x)|=k$ con $k \in \mathbb{R} \wedge k \geq 0$ è sufficiente risolvere la doppia equazione $|f(x)|=\pm k$.

Esempio

■ $|x^2 - 7| = 3$

$$x^2 - 7 = \pm 3 \quad \text{si trasforma in due equazioni} \quad x^2 - 7 = +3 \vee x^2 - 7 = -3$$

$$\text{La prima equazione} \quad x^2 - 7 = +3 \rightarrow x^2 = 10 \rightarrow x = \pm \sqrt{10}$$

$$\text{La seconda equazione} \quad x^2 - 7 = -3 \rightarrow x^2 = 4 \rightarrow x = \pm 2$$

$$\text{Le soluzioni dell'equazione sono} \quad x_1 = -\sqrt{10}; \quad x_2 = -2; \quad x_3 = +2; \quad x_4 = +\sqrt{10}$$

Equazioni con valore assoluto del tipo $|f(x)|=k$ con $k \in \mathbb{R} \wedge k < 0$

Se $k < 0$ allora l'equazione è impossibile. In questo caso $|f(x)|=k$ è una contraddizione, in quanto un valore assoluto di una espressione dà un valore sempre positivo. Questo si può evidenziare anche con il metodo generale di risoluzione.

■ $|x - 7| = -1$

Impostiamo la ricerca delle soluzioni con il metodo generale.

$$\begin{cases} x - 7 \geq 0 \\ x - 7 = -1 \end{cases} \cup \begin{cases} x - 7 < 0 \\ x - 7 = 1 \end{cases} \quad \text{Entrambi i sistemi non hanno soluzioni reali. L'equazione è dunque impossibile.}$$

Risolvi le seguenti equazioni che hanno l'incognita solo nel valore assoluto

10	$ x - 2x^2 = 1$	R. $x_1 = 1; x_2 = -\frac{1}{2}$
11	$ -x^2 - 4 = 9$	R. $x_1 = \sqrt{5}; x_2 = -\sqrt{5}$
12	$ x^2 - x = -3$	R. $\emptyset$
13	$ x^2 + 1 = 0$	R. $\emptyset$
14	$ 2x + 1 = 2$	$ x^2 - 3x + 1 = 1$
15	$ x^2 + 1 = 3$	$ x^2 - 1 = 3$

Equazioni nelle quali l'incognita si trova anche fuori dal modulo

Esempi

■ $|-1 + 3x| = 7x + 4$.

Osserviamo che il primo membro dell'equazione è un valore assoluto che cambia espressione a secondo del segno del suo argomento.

1°. esplicito i due casi dell'argomento $|-1 + 3x| = \begin{cases} -1 + 3x & \text{se } -1 + 3x \geq 0 \rightarrow x \geq \frac{1}{3} \\ 1 - 3x & \text{se } -1 + 3x < 0 \rightarrow x < \frac{1}{3} \end{cases}$

2°. modifichiamo l'equazione assegnata tenendo conto dei casi: si generano così i due sistemi

$$A] \begin{cases} x \geq \frac{1}{3} \\ -1 + 3x = 7x + 4 \end{cases} \quad B] \begin{cases} x < \frac{1}{3} \\ 1 - 3x = 7x + 4 \end{cases}$$

3°. risolviamo ciascun sistema $A] \begin{cases} x \geq \frac{1}{3} \\ 4x = -5 \rightarrow x = -\frac{5}{4} \end{cases} \quad B] \begin{cases} x < \frac{1}{3} \\ 10x = 3 \rightarrow x = \frac{3}{10} \end{cases}$

4°. indichiamo l'I.S. di ciascun sistema $I.S._A = \emptyset; I.S._B = \left\{ \frac{3}{10} \right\}$ e infine

5°. l'insieme soluzione dell'equazione assegnata $I.S._A \cup I.S._B = \emptyset \cup \left\{ \frac{3}{10} \right\} = \left\{ \frac{3}{10} \right\} \rightarrow x = \frac{3}{10}$

■ $|-2x + 5| = x - 3$

1°. esplicito i due casi dell'argomento $|-2x + 5| = \begin{cases} -2x + 5 & \text{se } -2x + 5 \geq 0 \rightarrow x \leq \frac{5}{2} \\ 2x - 5 & \text{se } -2x + 5 < 0 \rightarrow x > \frac{5}{2} \end{cases}$

2°. modifichiamo l'equazione assegnata tenendo conto dei casi: si generano così i due sistemi

$$A] \begin{cases} x \leq \frac{5}{2} \\ -2x + 5 = x - 3 \end{cases} \quad B] \begin{cases} x > \frac{5}{2} \\ 2x - 5 = x - 3 \end{cases}$$

3°. risolviamo ciascun sistema $A] \begin{cases} x \leq \frac{5}{2} \\ -3x = -8 \rightarrow x = \frac{8}{3} \end{cases} \quad B] \begin{cases} x > \frac{5}{2} \\ x = 2 \end{cases}$

4°. indichiamo l'I.S. di ciascun sistema $I.S._A = \emptyset; I.S._B = \emptyset$ e infine

5°. l'insieme soluzione dell'equazione assegnata $I.S._A \cup I.S._B = \emptyset \cup \emptyset = \emptyset$: equazione impossibile.

■ $|2x^2 - 3x| = -x$

1°. esplicito i due casi dell'argomento

$$|2x^2 - 3x| = \begin{cases} 2x^2 - 3x & \text{se } 2x^2 - 3x \geq 0 \rightarrow x \leq 0 \vee x \geq \frac{3}{2} \\ -2x^2 + 3x & \text{se } 2x^2 - 3x < 0 \rightarrow 0 < x < \frac{3}{2} \end{cases}$$

2°. modifico l'equazione assegnata tenendo conto dei casi: si generano così i due sistemi

$$A] \begin{cases} x \leq 0 \vee x \geq \frac{3}{2} \\ 2x^2 - 3x = -x \end{cases} \quad B] \begin{cases} 0 < x < \frac{3}{2} \\ -2x^2 + 3x = -x \end{cases}$$

3°. risolviamo ciascun sistema

$$A] \begin{cases} x \leq 0 \vee x \geq \frac{3}{2} \\ 2x^2 - 2x = 0 \rightarrow x_1 = 0 \vee x_2 = 1 \end{cases} \quad B] \begin{cases} 0 < x < \frac{3}{2} \\ -2x^2 + 4x = 0 \rightarrow x_1 = 0 \vee x_2 = 2 \end{cases}$$

4°. indichiamo l'I.S. di ciascun sistema e $I.S._A = \{0\}$; $I.S._B = \emptyset$ infine

5°. l'insieme soluzione dell'equazione assegnata $I.S._A \cup I.S._B = \{0\} \cup \emptyset = \{0\} \rightarrow x = 0$

■ $4|x^2 - x| = 1$

1°. esplicito i due casi dell'argomento

$$4|x^2 - x| = \begin{cases} x^2 - x & \text{se } x^2 - x \geq 0 \rightarrow x \leq 0 \vee x \geq 1 \\ -x^2 + x & \text{se } x^2 - x < 0 \rightarrow 0 < x < 1 \end{cases}$$

2°. modifichiamo l'equazione assegnata tenendo conto dei casi: si generano così i due sistemi

$$A] \begin{cases} x \leq 0 \vee x \geq 1 \\ 4(x^2 - x) = 1 \end{cases} \quad B] \begin{cases} 0 < x < 1 \\ 4(-x^2 + x) = 1 \end{cases}$$

3°. risolviamo ciascun sistema

$$A] \begin{cases} x \leq 0 \vee x \geq 1 \\ 4x^2 - 4x - 1 = 0 \rightarrow x_1 = \frac{1 - \sqrt{2}}{2} \vee x_2 = \frac{1 + \sqrt{2}}{2} \end{cases} \quad B] \begin{cases} 0 < x < 1 \\ -4x^2 + 4x - 1 = 0 \rightarrow x_1 = x_2 = \frac{1}{2} \end{cases}$$

4°. indichiamo l'I.S. di ciascun sistema e $I.S._A = \left\{ \frac{1 - \sqrt{2}}{2}; \frac{1 + \sqrt{2}}{2} \right\}$; $I.S._B = \left\{ \frac{1}{2} \right\}$ infine

5°. l'insieme soluzione dell'equazione assegnata

$$I.S._A \cup I.S._B = \left\{ \frac{1 - \sqrt{2}}{2}; \frac{1 + \sqrt{2}}{2} \right\} \cup \left\{ \frac{1}{2} \right\} = \left\{ \frac{1 - \sqrt{2}}{2}; \frac{1 + \sqrt{2}}{2}; \frac{1}{2} \right\} \rightarrow x_1 = \frac{1 - \sqrt{2}}{2}; x_2 = \frac{1 + \sqrt{2}}{2}; x_3 = \frac{1}{2}$$

Procedura risolutiva

Per risolvere un'equazione in cui l'incognita compare sia nel modulo sia fuori dal modulo, si pongono le condizioni iniziali sull'espressione che è all'interno del modulo e si vanno a risolvere due sistemi uniti dal connettivo logico "o":

nel primo sistema vi sarà la condizione $f(x) \geq 0$ e la seconda equazione si otterrà da quella data togliendo le barrette del modulo;

nel secondo sistema vi sarà la condizione $f(x) < 0$ e la seconda equazione si otterrà da quella data togliendo le barrette del modulo e cambiando il segno a tutto ciò che vi era all'interno

Esempio

■ $|2x - 1| = x + 2$

L'equazione si trasforma nell'unione dei due sistemi $\begin{cases} 2x - 1 \geq 0 \\ 2x - 1 = x + 2 \end{cases} \cup \begin{cases} 2x - 1 < 0 \\ -2x + 1 = x + 2 \end{cases}$

da cui $\begin{cases} x \geq \frac{1}{2} \\ x = 3 \end{cases} \cup \begin{cases} x < \frac{1}{2} \\ x = -\frac{1}{2} \end{cases}$ le soluzioni sono $x = 3 \vee x = -\frac{1}{2}$.

Determina l'insieme delle soluzioni delle seguenti equazioni con valore assoluto definite in $\mathbb{R}$

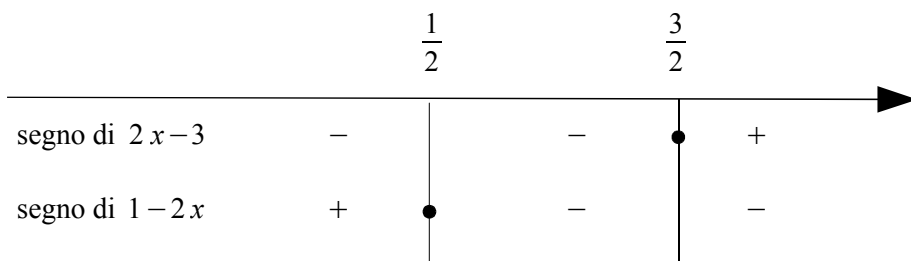
16	$ x-1 =x$	R. $x=\frac{1}{2}$
17	$ x^2-4 =3x-1$	R. $x_1=\frac{3+\sqrt{21}}{2}; x_2=\frac{-3+\sqrt{29}}{2}$
18	$ 2-x =4-x^2$	R. $x_1=2; x_2=-1$
19	$ x^2+2 =1-x^2$	R. $\emptyset$
20	$ -x^2+2x-3 =x+1$	R. $x_1=2; x_2=1$
21	$ -x^2+4x-7 =3-2x$	R. $\emptyset$
22	$ 2-4x =4(x-1)(x+2)$	R. $x_1=\frac{\sqrt{6}}{2}; x_2=-\frac{2+\sqrt{14}}{2}$
23	$ x^2-4x+3 =4x-6$	R. $x_1=\sqrt{3}; x_2=4+\sqrt{7}$
24	$ 1-2x =5x-7$	R. $x=2$
25	$ x^3-x^2 =x-1$	R. $x=1$
26	$ x^2-3x+2 =x+1$	R. $x_1=2+\sqrt{3}; x_2=2-\sqrt{3}$
27	$ x^2+1 =3+x$	R. $x_1=2; x_2=-1$
28	$ -x^2-4x-8 =3x-2-x^2$	R. $\emptyset$
29	$ x^3-4x^2 =1-4x$	R. $x_1=-1; x_2=\frac{5-\sqrt{21}}{2}$
30	$ x^4-3x^2 =x^2-2$	R. $x_1=\sqrt{2+\sqrt{2}}; x_2=-\sqrt{2+\sqrt{2}}; x_3=\sqrt{1+\sqrt{3}}; x_5=-\sqrt{1+\sqrt{3}}$
31	$ x^4-5x^2 =5-x^2$	R. $x_1=1; x_2=-1; x_3=\sqrt{5}; x_4=-\sqrt{5}$
32	$ 9-x^2 =x^2-3x+4$	R. $x_1=-1; x_2=\frac{13}{3}; x_3=\frac{5}{2}$
33	$ x^2-2x-5 =4-\frac{1}{4}x^2$	R. $x_1=\frac{18}{5}; x_2=-2; x_3=\frac{4+2\sqrt{7}}{3}; x_4=\frac{4-2\sqrt{7}}{3}$
34	$ x^2-3x+2 =2x-4$	R. $[x_1=2; x_2=3]$
35	$ x+5 =x^2-1$	R. $[x_1=-2; x_2=3]$
36	$ 2x-6 =7-2x^2$	R. $\left[x_1=\frac{1-\sqrt{3}}{2}; x_2=\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right]$
37	$ x^2-4 =x+8$	R. $[x_1=-3; x_2=4]$
38	$ x^2+1 =5-x$	R. $\left[x_1=\frac{-1-\sqrt{17}}{2}; x_2=\frac{-1+\sqrt{17}}{2}\right]$
39	$ x^4-x^2 =x^2+8$	R. $[x_1=-2; x_2=2]$
40	$ x^4-9 =x^2$	R. $\left[x_1=\frac{\sqrt{2+2\sqrt{37}}}{2}; x_2=\frac{-\sqrt{2+2\sqrt{37}}}{2}; x_3=\frac{\sqrt{-2+2\sqrt{37}}}{2}; x_4=\frac{-\sqrt{-2+2\sqrt{37}}}{2}\right]$
41	$ 1-x^2 =4x^2+x$	R. $\left[x_1=\frac{-1-\sqrt{21}}{10}; x_2=\frac{-1+\sqrt{21}}{10}\right]$
42	$ x^2-3x+2 =2x-4$	R. $[\emptyset]$
43	$ x^2-3x+2 =2x-4$	R. $[x_1=2; x_2=3]$

► 3. Equazioni con più espressioni in valore assoluto

Esempi

■ $|2x-3| - |1-2x| = 4$

L'equazione presenta due espressioni in valore assoluto; ciascuna di esse sarà sviluppata in due modi diversi dipendenti dal segno assunto dai rispettivi argomenti. Si presenteranno 4 casi e l'insieme soluzione dell'equazione sarà ottenuto dall'unione delle soluzioni dei singoli casi. Per semplificare il procedimento possiamo procedere studiando il segno di ciascun argomento e confrontarli servendoci del seguente schema:



I casi che si presentano possono essere esaminati nei tre sistemi:

$$\begin{array}{lll}
 A. \begin{cases} x \leq \frac{1}{2} \\ -(2x-3) - (1-2x) + x = 4 \end{cases} & B. \begin{cases} \frac{1}{2} \leq x < \frac{3}{2} \\ -(2x-3) + (1-2x) + x = 4 \end{cases} & C. \begin{cases} x \geq \frac{3}{2} \\ (2x-3) + (1-2x) + x = 4 \end{cases}
 \end{array}$$

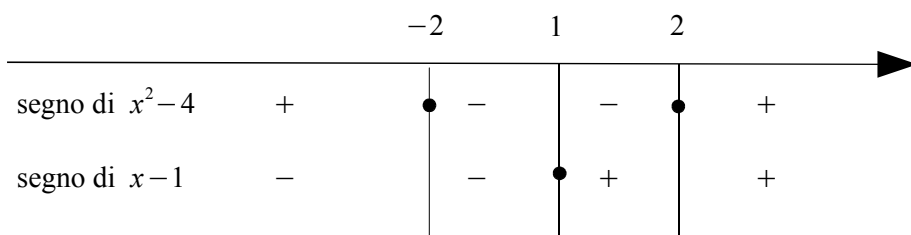
dove la prima condizione è la disequazione che vincola il segno degli argomenti e la seconda è l'equazione che risulta in base al segno definito. Risolviamo

$$\begin{array}{ll}
 A. \begin{cases} x \leq \frac{1}{2} \\ -(2x-3) - (1-2x) + x = 4 \rightarrow x=2 \end{cases} & \rightarrow I.S._A = \emptyset \quad \left(2 \text{ non è minore di } \frac{1}{2} \right) \\
 B. \begin{cases} \frac{1}{2} \leq x < \frac{3}{2} \\ -(2x-3) + (1-2x) + x = 4 \rightarrow x=0 \end{cases} & \rightarrow I.S._B = \emptyset \quad (0 \text{ non appartiene all'intervallo considerato}) \\
 C. \begin{cases} x \geq \frac{3}{2} \\ (2x-3) + (1-2x) + x = 4 \rightarrow x=6 \end{cases} & \rightarrow I.S._C = \{6\} \text{ soluzione accettabile}
 \end{array}$$

Conclusione: $I.S. = I.S._A \cup I.S._B \cup I.S._C = \{6\}$

■ $|x^2-4| - 3x = |x-1|$

Confrontiamo il segno di ciascun argomento servendoci dello schema:



In questo caso dobbiamo esaminare 4 casi che si esplicitano nei sistemi:

$$\begin{array}{ll}
 A. \begin{cases} x \leq -2 \\ x^2-4-3x = -x+1 \rightarrow x^2-2x-5=0 \rightarrow x_1=1-\sqrt{6} \vee x_2=1+\sqrt{6} \end{cases} & \rightarrow I.S._A = \emptyset \\
 B. \begin{cases} -2 < x < 1 \\ -x^2+4-3x = -x+1 \rightarrow x^2+2x-3=0 \rightarrow x_1=-3 \vee x_2=1 \end{cases} & \rightarrow I.S._B = \emptyset \\
 C. \begin{cases} 1 \leq x < 2 \\ -x^2+4-3x = x-1 \rightarrow x^2+4x-5=0 \rightarrow x_1=-5 \vee x_2=1 \end{cases} & \rightarrow I.S._C = \{1\}
 \end{array}$$

$$D. \begin{cases} x \geq 2 \\ x^2 - 4 - 3x = x - 1 \rightarrow x^2 - 4x - 3 = 0 \rightarrow x_1 = 2 - \sqrt{7} \vee x_2 = 2 + \sqrt{7} \end{cases} \rightarrow I.S._D = \{2 + \sqrt{7}\}$$

Conclusione: $i.S. = I.S._A \cup I.S._B \cup I.S._C \cup I.S._D = \{1; 2 + \sqrt{7}\}$

Procedura per risolvere una equazione con la presenza di uno o più valori assoluti

Si possono verificare tre casi:

1. L'incognita è presente solo nell'argomento del modulo: $|f(x)| = k$, l'equazione si risolve ponendo: $f(x) = \pm k$
 - Se $k < 0$ l'equazione è impossibile
2. L'incognita si trova anche al di fuori del modulo; in questo caso si analizza il segno dell'argomento del modulo e si risolvono i due sistemi dove la prima condizione è la disequazione che vincola il segno dell'argomento e la seconda è l'equazione che risulta in base al segno definito. L'insieme soluzione dell'equazione è dato dall'unione dell'Insieme Soluzione dei due sistemi.
3. Se è presente più di un modulo, si studia il segno di ogni argomento e dallo schema che ne segue si costruiscono e quindi risolvono i sistemi in cui la prima condizione è la disequazione che vincola il segno degli argomenti e la seconda è l'equazione in base al segno definito. Anche in questo caso l'Insieme Soluzione dell'equazione è dato dall'unione dell'Insieme Soluzione di ogni sistema.

Risolvi le seguenti equazioni con due valori assoluti

44	$ x - 2 + 5 - 2x = x - 1$	R. $x_1 = 2; x_2 = 3$
45	$ x^2 - 4x + 3 = 1 - 2 4 - x^2 $	R. $x = 2$
46	$ x - 1 = x^2 - x + 3 - x^2 $	R. $\emptyset$
47	$ 3 - 3x + x = 8 - 2 16 - 4x^2 $	R. $x_1 = \frac{-1 + \sqrt{87}}{4}; x_2 = \frac{1 + \sqrt{43}}{4}; x_3 = \frac{1 - 3\sqrt{33}}{8}; x_4 = \frac{-1 - \sqrt{217}}{8}$
48	$2 4 - x^2 = x^2 - 2x + 3 $	R. $x_1 = -1; x_2 = \frac{5}{3}; x_3 = -1 + 2\sqrt{3}; x_4 = -1 - 2\sqrt{3}$
49	$ 3x - 2 = x^2 - x^2 - x + 3$	R. $x_1 = \frac{5}{2}; x_2 = -\frac{1}{4}$
50	$ x = 3x - x^2 - 1 $	R. $x_1 = \sqrt{2} - 1; x_2 = \sqrt{2} + 1$
51	$ x^2 - 4x = 2x^2 - 3 $	R. $x_1 = -2 - \sqrt{7}; x_2 = -2 + \sqrt{7}; x_3 = \frac{2 + \sqrt{13}}{3}; x_4 = \frac{2 - \sqrt{13}}{3}$
52	$ 3x - x^2 - 2 = \frac{1}{2} + x^2 - x - 2 1 - x^2 $	R. $x_1 = \frac{9}{8}; x_2 = \sqrt{2} - \frac{1}{2}$
53	$ 9 - 4x^2 = x^2 + 2 x - 3 $	R. $x_1 = 1; x_2 = -\frac{3}{5}; x_3 = \frac{-1 + \sqrt{46}}{3}; x_4 = \frac{-1 - \sqrt{46}}{3}$
54	$ 5x - x^2 = 3 + 2x - x $	R. $x_1 = 1; x_2 = 3; x_3 = 2\sqrt{3} + 3; x_4 = 4 - \sqrt{19}$
55	$ 2x - 5 + x^2 - 1 = x - 2$	R. $\emptyset$
56	$ 3x - 6 + 4x - x^2 = x + 3$	R. $x_1 = 3; x_2 = \sqrt{3}; x_3 = 1 + \sqrt{10}$
57	$x + x^2 + x - 6 = \frac{1}{4}(x^2 + 10x + 25)$	R. $x_1 = \frac{-5 - 2\sqrt{5}}{5}; x_2 = \frac{-5 + 2\sqrt{5}}{5}; x_3 = \frac{1 + 2\sqrt{37}}{3}; x_4 = \frac{1 - 2\sqrt{37}}{3}$
58	$x + 2 x - 1 = x^2 - x $	R. $x_1 = 1 - \sqrt{3}; x_2 = 2 + \sqrt{6}$
59	$ x^3 - 4x = x $	R. $x_1 = \sqrt{5}; x_2 = -\sqrt{5}; x_3 = \sqrt{3}; x_4 = -\sqrt{3}; x = 0$
60	$ x - 2 = x^2 - 4 - 4$	R. $x_1 = 3; x_2 = -\frac{1 + \sqrt{41}}{2}$
61	$ x - 2 = x^2 - 4 - \frac{9}{4}$	R. $x_1 = \frac{1}{2}; x_2 = \frac{1 + 3\sqrt{2}}{2}; x_3 = -\frac{1 + \sqrt{34}}{2}$
62	$ x - 2 = x^2 - 4 - 2$	R. $x_1 = 0; x_2 = 1; x_3 = \frac{1 + \sqrt{17}}{2}; x_4 = -\frac{1 + \sqrt{33}}{2}$
63	$ x - 2 = x^2 - 4 $	R. $x_1 = -3; x_2 = -1; x_3 = 2$

64	$ x-2 = x^2-4 +1$	R.	$x_1=-\frac{1+\sqrt{21}}{2}; x_2=\frac{1-\sqrt{13}}{2}$
65	$ x-2 = x^2-4 +4$	R.	$x=-2$
66	$ x-2 = x^2-4 +5$	R.	$\emptyset$
67	$ x^2-3x =x x $	R.	$x_1=0; x_2=\frac{3}{2}$
68	$ x-1 (x+1)= 2x-4 $	R.	$x=\sqrt{6}-1$
69	$ x^2-5x+6 =(3-x) x^2+x-2 $	R.	$x_1=0; x_2=3; x_3=-1+\sqrt{5}; x_4=-1-\sqrt{5}$
70	$ 4x-x^2 -2x=2 x^2-9 $	R.	$x_1=-3-3\sqrt{3}; x_2=1-\sqrt{7}$
71	$(x-1)^2 x =x^2-1$	R.	$x_1=1; x_2=1+\sqrt{2}$
72	$ x ^2- x =2$	R.	$x_1=2; x_2=-2$
73	$ x ^2+3 x +2=0$	R.	$\emptyset$
74	$ x ^2-5 x +6=0$	R.	$x_1=2; x_2=-2; x_3=3; x_4=-3$
75	$ x-1 ^2- x^2-1 =1$	R.	$x=\frac{1-\sqrt{3}}{2}$
76	$(x-1 -\beta x-6)^2=0$	R.	$x_1=\frac{5}{2}; x_2=\frac{7}{4}$
77	$(x-1 -\beta x-3)^2=0$	R.	$x=1$
78	$(x -2 17-x^2)^3=8$	R.	$x_1=4; x_2=-4; x_3=\frac{1+\sqrt{257}}{4}; x_4=-\frac{1+\sqrt{257}}{4}$
79	$(2x-1 -1)(6-2 x^2-9)=0$	R.	$x_1=0; x_2=1; x_3=\sqrt{6}; x_4=-\sqrt{6}; x_5=2\sqrt{3}; x_6=-2\sqrt{3}$
80	$ x-2 (1- x-1)=\frac{1}{4}$	R.	$x_1=\frac{3}{2}; x_2=\frac{2-\sqrt{3}}{2}$
81	$\frac{ x-1 +3 4x+x^2+3 }{2}=2$	R.	$x_1=-3; x_2=-\frac{4}{3}; x_3=-\frac{2}{3}$
82	$ x-1 + x+1 =1$	R.	$x=-\frac{1}{2}$
83	$ 4x^2-4 -2 x+1 =0$	R.	$x_1=-1; x_2=\frac{1}{2}; x_3=\frac{3}{2}$
84	$ x-4 = (x-1)^2-1 $	R.	$x_1=\frac{1-\sqrt{17}}{2}; x_2=\frac{1+\sqrt{17}}{2}$
85	$\left 3x^2-\frac{1}{2}\right -x= x-1 $	R.	$x_1=\frac{\sqrt{2}}{2}; x_2=-\frac{\sqrt{2}}{2}$
86	$(x-1) 4-2x =x^2-2$	R.	$x_1=3+\sqrt{3}; x_2=\frac{3+\sqrt{3}}{3}; x_3=\frac{3-\sqrt{3}}{3}$
87	$(x-1) 4-2x =x^2-1$	R.	$x_1=1; x_2=5$
88	$(x-1) 4-2x =x^2+1$	R.	$x=3+\sqrt{6}$
89	$x^2 2x+2 =4 x $	R.	$x_1=-2; x_2=0; x_3=1$
90	$ x-2 - 1-x =(x-1)^2$	R.	$x_1=0; x_2=\sqrt{2}$
91	$2 x^2-9 +6 4x+12 =0$	R.	$x=-3$
92	$ x-2 + x =1-x^2$	R.	$\emptyset$
93	$ x-2 + x =1+x^2$	R.	$x_1=1; x_2=-1-\sqrt{2}$

2. EQUAZIONI IRRAZIONALI

► 1. Equazioni con un solo radicale

DEFINIZIONE. Una equazione si dice irrazionale quando l'incognita compare sotto il segno di radice.

Analizziamo le seguenti equazioni: $[A] \sqrt{3} \cdot x = x^2 - x + 2$, $[B] \sqrt{2}x = x^2 - x$.

Notiamo che l'equazione [A] è di secondo grado, intera con un coefficiente irrazionale (sotto il segno di radice), ma non è un'equazione irrazionale perché l'incognita non compare sotto la radice.

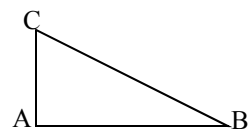
Nell'equazione [B] il monomio $2x$, contenente l'incognita, compare sotto il segno di radice pertanto essa è un'equazione irrazionale.

Problema

Determinate l'area di un triangolo rettangolo ABC retto in A avente perimetro di 24cm e i cateti che differiscono di 2cm.

Dati: $2p = 24$; $\overline{AB} - \overline{AC} = 2$

Obiettivo: ? Area



Strategia risolutiva: $\text{Area} = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{AC}}{2}$; dobbiamo quindi determinare i cateti.

Poniamo $\overline{AC} = x$ con $x > 0 \rightarrow \overline{AB} = 2 + x$ e sfruttiamo l'informazione relativa al perimetro per determinare l'equazione risolvibile $\overline{AB} + \overline{AC} + \overline{BC} = 24$. Applicando il teorema di Pitagora si ha $\overline{BC} = \sqrt{x^2 + (2+x)^2} = \sqrt{2x^2 + 4x + 4}$ e dunque otteniamo l'equazione risolvibile $2x + 2 + \sqrt{2x^2 + 4x + 4} = 24$ in cui l'incognita compare sotto il segno di radice.

Caso dell'indice della radice pari

Ricordiamo che l'espressione irrazionale $E = \sqrt[n]{f(x)}$ con n pari non nullo ha significato per tutti i valori di x che rendono non negativo il radicando, pertanto l'Insieme Soluzione di un'equazione irrazionale in cui compare uno o più radicali di indice pari sarà un sottoinsieme del Dominio o Insieme di Definizione del radicale (condizione di realtà del radicale).

Esempio

Riprendendo l'equazione $\sqrt{2x} = x^2 - x$ si avrà $D = I.D. = R^+ \cup \{0\} \rightarrow I.S. \subseteq D$; nessun numero negativo potrà essere soluzione dell'equazione.

L'espressione irrazionale $E = \sqrt[n]{f(x)}$ nel suo I.D. è positiva o nulla (per definizione), pertanto l'equazione $\sqrt{2x} = x^2 - x$ potrà verificarsi solo se il secondo membro sarà non negativo (condizione di concordanza del segno).

Quando abbiamo un'equazione nella qual l'incognita compare sotto una radice di indice n pari possiamo elevare alla potenza n entrambi i membri dell'equazione e la radice va via. Tuttavia, l'equazione ottenuta non sempre è equivalente a quella data, ossia non sempre ha le stesse soluzioni dell'equazione data.

Esempio

■ $\sqrt{x+2} = x$

1° metodo

Elevando al quadrato di ha $x+2 = x^2$ da cui $x^2 - x - 2 = 0$. Risolvendo questa equazione di secondo grado otteniamo le soluzioni $x_1 = -1$; $x_2 = 2$. Tuttavia, sostituendo questi valori di x nell'equazione irrazionale di partenza si ha:

per $x = -1 \rightarrow \sqrt{-1+2} = -1 \rightarrow \sqrt{1} = -1$ che è falsa, pertanto $x = -1$ non può essere soluzione;

per $x = 2 \rightarrow \sqrt{2+2} = 2 \rightarrow \sqrt{4} = 2$ che è vera, pertanto $x = 2$ è l'unica soluzione.

Per risolvere un'equazione irrazionale con indice pari possiamo allora elevare alla potenza pari della radice i due membri dell'equazione, risolvere l'equazione che si ottiene e verificare se le soluzioni sono accettabili.

Possiamo però procedere in un altro modo.

2° metodo

L'Insieme Soluzione dell'equazione irrazionale $\sqrt[n]{f(x)} = g(x)$ con n pari non nullo sarà un sottoinsieme dell'insieme, chiamiamolo H, in cui sono contemporaneamente vere le condizioni

$$f(x) \geq 0 \wedge g(x) \geq 0 \quad \text{ossia l'insieme H soluzione del sistema} \quad \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) \geq 0 \end{cases} \quad \text{In simboli: } I.S. \subseteq H.$$

Esempi

■ $\sqrt{x+2} = x$

La soluzione si ottiene risolvendo $\begin{cases} x+2 \geq 0 \\ x \geq 0 \\ x+2 = x^2 \end{cases}$ le disequazioni danno come condizione $x \geq 0$, delle due

soluzioni $x_1 = -1$; $x_2 = 2$ l'unica da accettare è $x=2$.

■ $\sqrt{5-2x} = x-1$

Elevo ambo i membri al quadrato, ottengo $5-2x = x^2 - 2x + 1 \rightarrow x^2 = 4 \rightarrow x_{1,2} = \pm 2$

Sostituisco $x=-2$ ottengo $\sqrt{5-2 \cdot (-2)} = -2-1 \rightarrow \sqrt{9} = -3$ falso, quindi $x=-2$ non è una soluzione accettabile.

Sostituisco $x=+2$ ottengo $\sqrt{5-2 \cdot 2} = 2-1 \rightarrow \sqrt{1} = 1$ vero, quindi $x=+2$ è una soluzione.

Ponendo le condizioni $\begin{cases} 5-2x \geq 0 \\ x \geq 1 \end{cases}$ si ha $\begin{cases} x \leq \frac{5}{2} \\ x \geq 1 \end{cases} \rightarrow 1 \leq x \leq \frac{5}{2}$ Pertanto la soluzione $x=-2$ non è

accettabile in quanto non è compresa tra 1 e $5/2$, la soluzione $x=+2$ è invece accettabile.

Caso dell'indice della radice dispari

L'espressione irrazionale $E = \sqrt[n]{f(x)}$ con n dispari è definita per tutti i valori reali per cui è definito il radicando, quindi l'equazione irrazionale $\sqrt[n]{f(x)} = g(x)$ si risolve elevando ad n entrambi i membri dell'equazione: $f(x) = g^n(x)$

Esempi

■ $\sqrt[3]{x-2} = \frac{1}{2}$

Elevando al cubo si ha $x-2 = \frac{1}{8} \rightarrow x = 2 + \frac{1}{8} \rightarrow x = \frac{17}{8}$

■ $\sqrt[3]{-3x^2+3x+1} = x$

Elevando al cubo si ha $-3x^2+3x+1 = x^3 \rightarrow (x-1)^3 = 0 \rightarrow x-1 = 0 \rightarrow x=1$

■ Per l'equazione $\sqrt[3]{\frac{x}{2x+3}} = \frac{2-5x}{4}$ il dominio del radicando è l'insieme $H = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x \neq -\frac{3}{2} \right\}$ e dunque $I.S. \subseteq H$.

■ Per l'equazione $\sqrt[3]{\frac{1}{x}} = \frac{4x+x^2}{3-x}$ $I.S. \subseteq H$ dove H è $H = \{ x \in \mathbb{R} \mid x \neq 0 \wedge x \neq 3 \}$ in cui esistono reali entrambi i membri dell'equazione.

Determinate l'insieme H in cui si possono individuare le soluzioni delle seguenti equazioni:

94 $\sqrt{3x+10} = 1 - \frac{3}{2}x$

95 $\sqrt[3]{3x+10} = 1 - \frac{3}{2}x$

96 $\frac{4x+1}{2x} = \sqrt{\frac{2}{x+1}}$

97 $\frac{4x+1}{2x} = \sqrt[3]{\frac{2}{x+1}}$

Procedura per determinare l'Insieme Soluzione di un'equazione irrazionale

L'equazione contiene un solo radicale: la forma canonica è $\sqrt[n]{f(x)} = g(x)$

Esempi

- Determiniamo I.S. dell'equazione $\sqrt{2x} = x^2 - x$
 - 1°. portiamo l'equazione in forma canonica
 - 2°. determiniamo l'insieme H in cui si possono determinare le soluzioni dell'equazione; abbiamo già visto in precedenza che $I.S. \subseteq H$ con $H = \begin{cases} 2x \geq 0 \\ x^2 - x \geq 0 \end{cases} \rightarrow H = \{x \in \mathbb{R} \mid x = 0 \vee x \geq 1\}$
 - 3°. rendiamo razionale l'equazione elevando ambo i membri all'esponente uguale all'indice della radice, quindi otteniamo $(\sqrt{2x})^2 = (x^2 - x)^2 \rightarrow 2x = x^4 - 2x^3 + x^2$
 - 4°. risolviamo l'equazione ottenuta $x^4 - 2x^3 + x^2 - 2x = 0 \rightarrow x \cdot (x^2 + 1) \cdot (x - 2) = 0 \rightarrow x = 0 \vee x = 2$
 - 5°. confrontiamo le soluzioni con H e in questo caso possiamo affermare che l'insieme soluzione dell'equazione razionale è anche l'Insieme Soluzione dell'equazione irrazionale assegnata $I.S. = \{0; 2\}$

- Determiniamo I.S. dell'equazione $\sqrt[3]{\frac{2x^2-1}{x}} - x = 0$
 - 1°. l'equazione in forma canonica è $\sqrt[3]{\frac{2x^2-1}{x}} = x$
 - 2°. l'insieme H in cui si possono determinare le soluzioni dell'equazione è $H = \mathbb{R}_0$, infatti basta $x \neq 0$ affinché sia reale il radicale
 - 3°. eleviamo alla terza potenza ambo i membri dell'equazione e otteniamo l'equazione razionale $\frac{2x^2-1}{x} = x^3$
 - 4°. risolviamo l'equazione ottenuta $\frac{2x^2-1}{x} = x^3 \rightarrow 2x^2 - 1 = x^4 \rightarrow x^4 - 2x^2 + 1 = 0 \rightarrow (x^2 - 1)^2 \rightarrow x_1 = x_2 = 1 \vee x_3 = x_4 = -1$
 - 5°. confrontiamo le soluzioni con H e possiamo dire $I.S. = \{+1; -1\}$

- Riprendiamo l'equazione risolvente del problema posto all'inizio del paragrafo: $2x + 2 + \sqrt{2x^2 + 4x + 4} = 24$ e determiniamone l'I.S. e quindi la risposta all'obiettivo del problema stesso.

Isoliamo il radicale e determiniamo l'insieme H:

$$\sqrt{2x^2 + 4x + 4} = 22 - 2x \rightarrow H = \begin{cases} 2x^2 + 4x + 4 \geq 0 \\ 22 - 2x \geq 0 \end{cases} \rightarrow H = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 11\} \quad \text{e per la condizione iniziale}$$

sull'incognita il problema avrà soluzione se $0 < x \leq 11$ (*).

Trasformiamo l'equazione in razionale elevando al quadrato ambo i membri: $x^2 - 46x + 240 = 0$ le cui soluzioni sono $x_1 = 6 \vee x_2 = 40$. Solamente $x = 6$ soddisfa la condizione (*), quindi $\overline{AC} = 6$; $\overline{AB} = 8 \rightarrow Area = 24 (cm^2)$.

Determinare l.S. delle seguenti equazioni:

98 $\sqrt[4]{2x+1}=2$

99 $\sqrt{2x+1}=7$

100 $\sqrt{5x-2}=-4$

101 $\sqrt{2x^2+9}=2$

102 $\sqrt{3x+10}=1-\frac{3}{2}x$

103 $-3=\sqrt{\frac{2}{x+1}}$

104 $\sqrt[3]{3x+1-3x^2}=x$

105 $\sqrt{x^2+1}-3+x^2=(x-2)^2$

106 $\sqrt{\frac{2+3x}{x}}=\frac{1}{x}+1$

107 $\sqrt[3]{3x+10}=1$

108 $x-\sqrt{x+2}=0$

109 $\sqrt{25-x^2}+x=7$

110 $\sqrt{\frac{x-1}{3-x}}=\frac{1}{x-3}$

111 $\sqrt{x+2}=x-1$

112 $3-x-\sqrt{x-2x^2+5}=0$

113 $\sqrt{5x^2+4x-8}+3x=2$

114 Basta la condizione $x \geq 0$ per determinare l'insieme H in cui si possono ricercare le soluzioni di ciascuna delle equazioni $a) \sqrt{x}=\frac{1}{x+1}$ e $b) \sqrt[4]{x}=\frac{1}{4-x^2}$?

115 Verificate che per l'equazione $3+\sqrt{7-3x}-x=0$ l'insieme H è vuoto.

116 Perché l'equazione $\sqrt{x^2-1}=-3$ è impossibile?

$\sqrt[3]{2x+1}=-2$

$\sqrt{4-x^2}=1$

$\sqrt{2-x^2}+x=6$

$\sqrt[3]{16x-64}=x-4$

$\sqrt[3]{3x+10}=1$

$x-\sqrt{x+2}=0$

$\sqrt{25-x^2}+x=7$

$\sqrt{\frac{x-1}{3-x}}=\frac{1}{x-3}$

$\sqrt{3x+10}=1-\frac{3}{2}x$

$-3=\sqrt{\frac{2}{x+1}}$

$\sqrt[3]{3x+1-3x^2}=x$

$\sqrt{x^2+1}-3+x^2=(x-2)^2$

$\sqrt{\frac{2+3x}{x}}=\frac{1}{x}+1$

$2\sqrt{x^2-4x-33}-x=15$

$x+\sqrt{25-x^2}=7$

$4-3x+\sqrt{8x^2-21x+34}=0$

► 2. Equazioni con due radicali

Non potendo stabilire una forma canonica, procederemo mediante esempi al fine di acquisire un metodo risolutivo a seconda dei casi che si possono presentare.

Esempi

$$\blacksquare \quad \sqrt{2 - \frac{1}{x}} = \sqrt{x}.$$

Osserviamo subito che i due membri, nell'insieme in cui entrambi hanno significato, sono positivi.

Determiniamo quindi l'insieme H di definizione per entrambi: $H = \begin{cases} 2 - \frac{1}{x} \geq 0 \\ x \geq 0 \end{cases}$ e risolvendo le due

disequazioni otteniamo $\begin{cases} x < 0 \vee x \geq \frac{1}{2} \\ x \geq 0 \end{cases}$ da cui $H = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x \geq \frac{1}{2} \right\}$; eleviamo al quadrato entrambi i

membri ottenendo l'equazione razionale fratta $2 - \frac{1}{x} = x$ da cui $x_1 = x_2 = 1$ poiché tale valore appartiene all'insieme H si ha $I.S. = \{1\}$.

$$\blacksquare \quad \sqrt{x+3} - \sqrt[3]{2x^2+6x} = 0$$

Separiamo i due radicali applicando il primo principio delle equazioni $\sqrt{x+3} = \sqrt[3]{2x^2+6x}$.

Affinché i due membri dell'equazione siano positivi dobbiamo porre la condizione di positività anche al radicando del radicale cubico:

$H = \begin{cases} x+3 \geq 0 \\ 2x^2+6x \geq 0 \end{cases}$ da cui $H = \{x \in \mathbb{R} \mid x = -3 \vee x \geq 0\}$. Per trasformare l'equazione in una razionale,

essendo 6 il minimo comune indice, possiamo trasformare in $\sqrt[6]{x+3} = \sqrt[6]{2x^2+6x}$ e poi, elevando alla sesta potenza, si ha $(x+3)^3 = (2x^2+6x)^2 \rightarrow (x+3)^3 - (2x^2+6x)^2 = 0$ ora con il raccoglimento a fattor comune otteniamo $(x+3)^2 \cdot (-4x^2+x+3) = 0$. Per la legge di annullamento del prodotto si ha $(x+3)^2 = 0 \rightarrow x+3 = 0 \rightarrow x = -3$

$-4x^2+x+3 = 0 \rightarrow x_1 = -\frac{3}{4} \vee x_2 = 1$; confrontiamo ora con gli elementi di H per ottenere l'insieme

soluzione dell'equazione assegnata $I.S. = \{-3; 1\}$.

$$\blacksquare \quad \sqrt{x} + \sqrt{x^3+2x-1} = 0.$$

Separiamo i due radicali applicando il primo principio delle equazioni; si ottiene $\sqrt{x} = -\sqrt{x^3+2x-1} = 0$; osserviamo che i due membri nell'insieme in cui sono definiti sono di segno opposto e dunque l'uguaglianza sarà vera solo nel caso in cui entrambi si annullino.

Il primo membro si annulla solo per $x=0$ che non annulla il secondo membro pertanto l'equazione è impossibile.

$$\blacksquare \quad -\sqrt{x^2+3x} + \sqrt{2x+2} = 0.$$

Portiamo la radice con il segno meno a secondo membro, in modo da avere due radici positive

$$\sqrt{2x+2} = 0 + \sqrt{x^2+3x}$$

Poniamo le condizioni sull'accettabilità della soluzione $\begin{cases} 2x+2 \geq 0 \\ x^2+3x \geq 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ x \leq -3 \vee x \geq 0 \end{cases} \rightarrow x \geq -1$

Risolve ora l'equazione $2x+2 = x^2+3x \rightarrow x^2+x-2 = 0$ le soluzioni sono $x_1 = -2$; $x_2 = 1$. Di queste due soluzioni solo la seconda soddisfa le condizioni di accettabilità.

$$\blacksquare \quad \sqrt{x+7} - \sqrt{x-1} = 2$$

In questo esempio ci sono altri termini oltre i due radicali. Spostiamo dopo l'uguale il radicale negativo in modo che sia a destra sia a sinistra i termini siano positivi:

$$\sqrt{x+7} = \sqrt{x-1} + 2$$

$$\text{C.E. } \begin{cases} x+7 \geq 0 \\ x-1 \geq 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x \geq -7 \\ x \geq 1 \end{cases} \rightarrow x \geq 1$$

Torniamo all'equazione, eleviamo al quadrato $x+7=4+4\sqrt{x-1}+x-1 \rightarrow 4\sqrt{x-1}=4 \rightarrow \sqrt{x-1}=1$

Eleviamo nuovamente al quadrato $x-1=1 \rightarrow x=2$

Poiché $2 > 1$ la soluzione è accettabile.

$$\blacksquare \quad \sqrt{x+12}-1=\sqrt{1-x}$$

Portiamo -1 al secondo membro in modo da avere tutti termini positivi:

$$\sqrt{x+12}=\sqrt{1-x}+1$$

$$\text{C.E. } \begin{cases} x+12 \geq 0 \\ 1-x \geq 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x \geq -12 \\ x \leq 1 \end{cases} \rightarrow -12 \leq x \leq 1$$

Torniamo all'equazione ed eleviamo al quadrato ambo i membri $x+12=1-x+2\sqrt{1-x}+1$ semplificando $x+5=\sqrt{1-x}$. Scriviamo le condizioni per quest'altra equazione irrazionale

$$\begin{cases} x+5 \geq 0 \\ -12 \leq x \leq 1 \end{cases} \rightarrow -5 \leq x \leq 1$$

Eleviamo al quadrato l'ultima equazione ottenuta $x^2+10x+25=1-x \rightarrow x^2+11x+24=0$

Le soluzioni sono $x=-8$ non accettabile, $x=-3$ accettabile.

$$\blacksquare \quad \sqrt{x^2+1}-\sqrt{1-4x}=x$$

Trasporto a destra il radicale che ha il segno meno, in modo che diventi positivo

$$\sqrt{x^2+1}=\sqrt{1-4x}+x$$

In questo caso risulta problematico risolvere il sistema con tutte le condizioni di accettabilità, perché bisognerebbe risolvere anche la disequazione irrazionale $\sqrt{1-4x}+x \geq 0$. Ci limiteremo allora a risolvere l'equazione e poi verificare le soluzioni.

Elevo al quadrato ambo i membri $x^2+1=1-4x+x^2+2x\sqrt{1-4x}$

Semplificando si ha $4x=2x\sqrt{1-4x} \rightarrow 2x=x\sqrt{1-4x} \rightarrow 2x-x\sqrt{1-4x}=0 \rightarrow x(2-\sqrt{1-4x})=0$

Una soluzione è $x=0$, la seconda si ottiene da $2-\sqrt{1-4x}=0 \rightarrow 2=\sqrt{1-4x}$ elevando al quadrato si ha $4=1-4x \rightarrow x=-\frac{3}{4}$.

Verifichiamo ora le soluzioni

Per $x=0$ si ha $\sqrt{0^2+1}-\sqrt{1-4 \cdot 0}=0 \rightarrow 1-1=0$ soluzione accettabile.

Per $x=-\frac{3}{4}$ si ha $\sqrt{\left(-\frac{3}{4}\right)^2+1}-\sqrt{1-4 \cdot \left(-\frac{3}{4}\right)}=-\frac{3}{4}$ sviluppando i calcoli si ha $\frac{5}{4}=\frac{5}{4}$ soluzione accettabile.

Risolvi le seguenti equazioni con due radicali

117 Assegna il valore di verità alla seguente proposizione: “L’I.S. dell’equazione $\sqrt{3x-5} = \sqrt{1-x}$ è l’insieme vuoto.”

118 $\sqrt{3x-2} = \sqrt{2x-3}$

119 $\sqrt{x-2} = 1 - \sqrt{3-x}$

120 $\sqrt{6-3x} = 2 + \sqrt{x+1}$

121 $\sqrt{4-3x} = \sqrt{x^2-x-1}$

122 $\sqrt{3-2x} = -\sqrt{x^2+3}$

123 $\sqrt{3-x} = \sqrt{x+1} - 1$

124 $2\sqrt{x-1} = \sqrt{1+2x} + 1$

125 $3\sqrt{x-x^2} = 2\sqrt{x-1}$

126 $\sqrt{x+1} = 3\sqrt{4-x}$

127 $\sqrt{x^2-x-3} = 2\sqrt{x+5}$

128 $1 + 2\sqrt{1 - \frac{2}{3}x} = \sqrt{2x+1}$

129 $4 - \sqrt{x-2} = \sqrt{x-1} + 3$

130 $2 - 2\sqrt{2-x} = 4\sqrt{1-x}$

131 $\sqrt{x^3-2x^2} = 3\sqrt{x^2-2x}$

132 $3\sqrt{x^4-x^3} = 4\sqrt{x^4+2x^3}$

133 $\sqrt{2x^2-4x-3} = \sqrt{x^2-1}$

134 $\sqrt{x^2+8} = \sqrt{4-x^2}$

135 $\sqrt{x^2-2x+3} = \sqrt{1-x^2} + 2x$

136 $\sqrt{4x-7} + \sqrt{7x-4x^2} = 0$

137 $\sqrt{x^2+6x+9} + 2\sqrt{1-x} = 0$

R. impossibile

R. $x=2; x=3$

R. $x = \frac{3-2\sqrt{6}}{4}$

R. $x = -1 - \sqrt{6}$

R. $\emptyset$

R. $x = \frac{2+\sqrt{7}}{2}$

R. $x = 4 + 2\sqrt{2}$

R. $x=1$

R. $x = \frac{7}{2}$

R. $x_1 = \frac{5+3\sqrt{13}}{2}; x_2 = \frac{5-3\sqrt{13}}{2}$

R. $x = \frac{60}{49}$

R. $x=2$

R. $x=1$

R. $x_1=0; x_2=2; x_3=9$

R. $x_1=0; x_2=-\frac{41}{7}$

R. $x=2+\sqrt{6}$

R. $\emptyset$

R. $x=1$

► 3. Equazioni che contengono due radicali e altri termini

Esempio

■ $\sqrt{x+7} - \sqrt{x-1} = 2$.

1°. applicando il primo principio, separiamo i due radicali avendo cura di lasciare a sinistra dell'uguale il radicale col segno positivo $\sqrt{x+7} = 2 + \sqrt{x-1}$.

2°. determiniamo l'insieme H per la realtà dei radicali $H = \begin{cases} x+7 \geq 0 \\ x-1 \geq 0 \end{cases} \rightarrow H = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 1\}$

3°. analizziamo il secondo membro che dovrà essere positivo per permettere di costruire l'equazione razionale da risolvere $2 + \sqrt{x-1} \geq 0$ che in H è certamente positivo essendo somma di termini positivi.

4°. eleviamo ambo i membri al quadrato $(\sqrt{x+7})^2 = (2 + \sqrt{x-1})^2$ facendo attenzione al secondo membro che si presenta come quadrato di binomio
 $x+7 = 4 + 4 \cdot \sqrt{x-1} + (x-1) \rightarrow 4 \cdot \sqrt{x-1} = 4$

5°. ci troviamo di fronte un'altra equazione irrazionale, ma per le condizioni poste possiamo procedere elevando al quadrato ambo i membri $x-1 = 1 \rightarrow x = 2$

6°. confrontiamo con l'insieme H, essendo 2 un elemento di H possiamo concludere $I.S. = \{2\}$.

■ $\sqrt{x+12} - 1 = \sqrt{1-x}$.

Determiniamo l'insieme H per la realtà dei radicali, $H = \begin{cases} x+12 \geq 0 \\ 1-x \geq 0 \end{cases} \rightarrow H = \{x \in \mathbb{R} \mid -12 \leq x \leq 1\}$

Notiamo che i due radicali sono già separati; ci conviene comunque trasportare il termine noto a destra dell'uguale ottenendo $\sqrt{x+12} = 1 + \sqrt{1-x}$ perché in H il secondo membro risulti positivo.

L'equazione razionale che si ottiene elevando al quadrato è $\sqrt{x-1} = 5+x$ e prima di renderla razionale dobbiamo porre la condizione di positività sul secondo membro. L'insieme H_1 in cui si verificano le condizioni per elevare al quadrato si ottiene dal sistema $H_1 = \begin{cases} 5+x \geq 0 \\ -12 \leq x \leq 1 \end{cases}$ pertanto

$H_1 = \{x \in \mathbb{R} \mid -5 \leq x \leq 1\}$. Possiamo elevare al quadrato ottenendo l'equazione $x^2 + 11x + 24 = 0$ le cui soluzioni sono $x_1 = -8 \vee x_2 = -3$; confrontando con l'insieme H_1 possiamo concludere che $I.S. = \{-3\}$.

■ $\sqrt{2x-5} = 3 - \sqrt{x+1}$

Determiniamo l'insieme H ponendo per entrambi i radicali la condizione di realtà:

$$H = \begin{cases} 2x-5 \geq 0 \\ x+1 \geq 0 \end{cases} \rightarrow H = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq \frac{5}{2}\right\}$$

Prima di procedere con l'elevamento a potenza, dobbiamo porre la condizione di concordanza del segno: applicando il primo principio, trasportiamo al primo membro il radicale di destra e nell'equazione trovata $\sqrt{2x-5} + \sqrt{x+1} = 3$ è assicurata la concordanza del segno.

Eleviamo al quadrato $(\sqrt{2x-5} + \sqrt{x+1})^2 = 3^2 \rightarrow (2x-5) + (x+1) + 2\sqrt{(2x-5) \cdot (x+1)} = 9$ e otteniamo l'equazione irrazionale $2\sqrt{(2x-5) \cdot (x+1)} = 13 - 3x$ contenente un solo radicando. Nell'insieme H è garantita la realtà del radicale, ma dobbiamo imporre che il secondo membro sia non negativo; otteniamo

$$H_1 = \begin{cases} x \geq \frac{5}{2} \\ 13-3x \geq 0 \end{cases} \rightarrow H_1 = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{5}{2} \leq x \leq \frac{13}{2}\right\} \text{ in cui cerchiamo le soluzioni dell'equazione assegnata.}$$

Procedendo elevando al quadrato si ha l'equazione razionale $x^2 - 66x + 189 = 0 \rightarrow x_1 = 3 \vee x_2 = 63$ e confrontando con H_1 si conclude $I.S. = \{3\}$.

■ $\sqrt{x^2+1} - \sqrt{1-4x} = x$

Determiniamo l'insieme **H** ponendo per entrambi i radicali la condizione di realtà:

$$H = \left\{ \begin{array}{l} 1-4x \geq 0 \\ x^2+1 \geq 0 \end{array} \right. \rightarrow H = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x \leq \frac{1}{4} \right\}$$

Trasportiamo al secondo membro il radicale preceduto dal segno negativo: $\sqrt{x^2+1} = x + \sqrt{1-4x}$.

Prima di elevare al quadrato dovremmo porre le condizioni per la concordanza del segno e quindi risolvere $x + \sqrt{1-4x} \geq 0$ che è una disequazione irrazionale, argomento che sarà oggetto di studi superiori. Usiamo allora il metodo della verifica finale: si risolve l'equazione elevando al quadrato e giunti alle soluzioni si vanno a sostituire, una alla volta, nell'equazione iniziale individuando quale dei risultati rende vera l'uguaglianza

$$(\sqrt{x^2+1})^2 = (x + \sqrt{1-4x})^2 \rightarrow x^2+1 = x^2 + (1-4x) + 2x \cdot \sqrt{1-4x} \rightarrow 2x \cdot \sqrt{1-4x} = 4x$$

Quest'ultima equazione presenta un solo radicale reale in H e ha i due membri concordi. Possiamo procedere elevando al quadrato oppure raccogliendo $2x$ a fattor comune e poi applicare la legge di annullamento del prodotto:

$$2x\sqrt{1-4x} - 2x = 0 \rightarrow x=0 \vee \sqrt{1-4x}=2 \text{ e da questa si ottiene } x = -\frac{3}{4}$$

Verifica:

1. sostituiamo $x=0$ nell'equazione iniziale (%) e otteniamo $1-1=0$ vero
2. sostituiamo $x=-\frac{3}{4}$ nell'equazione iniziale (%) e otteniamo $\frac{5}{4}-2=-\frac{3}{4} \rightarrow -\frac{3}{4}=-\frac{3}{4}$ vero.

Conclusione: $I.S. = \left\{ 0; -\frac{3}{4} \right\}$

138 Assegnate il valore di verità alla proposizione: “ Nell'insieme $H = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 2\}$ l'equazione $\sqrt{2x+1} + \sqrt{x-2} + 4 = 0$ è impossibile”.

Risolvi le seguenti equazioni irrazionali:

139 $\sqrt{x^2-4} = 3 + 2\sqrt{1-x^2}$

R. $\emptyset$

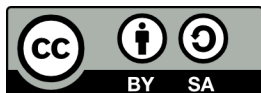
140 $\sqrt{4+x^2} = 1 + \sqrt{x^2-1}$

R. $x_1 = \sqrt{5}; x_2 = -\sqrt{5}$

141 $\sqrt{2x+1} = 3 + 2\sqrt{x-6}$

R. $x = 26 - 6\sqrt{11}$

Copyright © Matematicamente.it 2011



Questo libro, eccetto dove diversamente specificato, è rilasciato nei termini della licenza **Creative Commons Attribuzione – Condividi allo stesso modo 3.0 Italia**

il cui testo integrale è disponibile al sito

<http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/it/legalcode>

Tu sei libero:

di riprodurre, distribuire, comunicare al pubblico, esporre in pubblico, rappresentare, eseguire e recitare quest'opera, di modificare quest'opera, alle seguenti condizioni:

Attribuzione — Devi attribuire la paternità dell'opera nei modi indicati dall'autore o da chi ti ha dato l'opera in licenza e in modo tale da non suggerire che essi avallino te o il modo in cui tu usi l'opera.

Condividi allo stesso modo — Se alteri o trasformi quest'opera, o se la usi per crearne un'altra, puoi distribuire l'opera risultante solo con una licenza identica o equivalente a questa.

Autori

Claudio Carboncini: teoria, editing

Francesco Daddi: teoria, esercizi

Gemma Fiorito: teoria, esercizi

Anna Cristina Mocchetti: correzioni

Antonio Bernardo: coordinamento

Collaborazione, commenti e suggerimenti

Se vuoi contribuire anche tu alla stesura e aggiornamento del manuale Matematica C³ o se vuoi inviare dei commenti e/o suggerimenti scrivi a antoniobernardo@matematicamente.it

Versione del documento

Versione 1.2 del 24.09.2011