

Equazioni

Glossario

Identità: eguaglianza tra due espressioni verificata per qualsiasi valore delle incognite

Equazione: eguaglianza tra due espressioni verificata solo per alcuni valori delle incognite

Membri della equazione: le due parti prima e dopo il segno di uguale

Incognite: le lettere che compaiono nelle espressioni, che verranno sostituite con dei valori una volta risolta la equazione

Termini noti: i termini della equazione che non contengono incognite (per esempio un numero)

Equazione intera: se non compare una incognita al denominatore di una frazione all'interno della equazione

Equazione frazionaria: se al denominatore compare una incognita

Soluzioni: i valori che rendono vera la equazione, detti anche **radici**, l'insieme che contiene le soluzioni viene detto **insieme ambiente** o **insieme verità**

Equazioni equivalenti: quando due o più equazioni hanno le stesse soluzioni

Equazione intera: una equazione senza termini frazionari

Risoluzione di una equazione

Nota del professore: si vedono troppi errori, bisogna saperle fare a occhi chiusi

Si utilizzano le seguenti regole ereditate dagli assiomi:

- $x + a = b \Leftrightarrow x + a + (-a) = b + (-a)$ quindi $x = b - a$ (somma a tutti i membri)
- $x \cdot a = b \Leftrightarrow \frac{1}{a} \cdot x \cdot a = b \cdot \frac{1}{a} \wedge a \neq 0$ quindi $x = \frac{b}{a}$ (moltiplica a tutti i membri)

Principi di equivalenza

- Aggiungendo o sottraendo ai due membri di una equazione uno stesso numero o una stessa espressione algebrica contenente l'incognita, si ottiene una equazione equivalente a quella data
 - $7x + 4 + 9x = 55 + 9x$
- Moltiplicando o dividendo i due membri di una equazione per uno stesso numero diverso da zero si ottiene una equazione equivalente a quella data
 - $2(5x + 9) = 2(66)$

Quindi:

- Se si invertono tutti i segni (moltiplicazione per -1) si ottiene una equazione equivalente
- Si può spostare un termine da una parte all'altra invertendo il segno (somma o sottrai per lo stesso termine)
- Una equazione frazionaria si può fare diventare intera moltiplicando i termini per l'mcm dei denominatori

Verifica di una equazione

Per verificare una soluzione, basta sostituirla alle incognite e verificare che la equazione risulti vera.

Legge di annullamento del prodotto

Nota bene che il termine a destra deve essere 0, non un valore k.

$$a \cdot b = 0 \Leftrightarrow a = 0 \vee b = 0$$

Equazioni di primo grado

Dette anche equazioni lineari

Equazioni determinate:

- $ax = b$ con $a, b \neq 0$
- $x = \frac{a}{b}$

Equazioni impossibili:

- $ax = b$ con $a = 0, b \neq 0$
- $x = \frac{b}{0}$

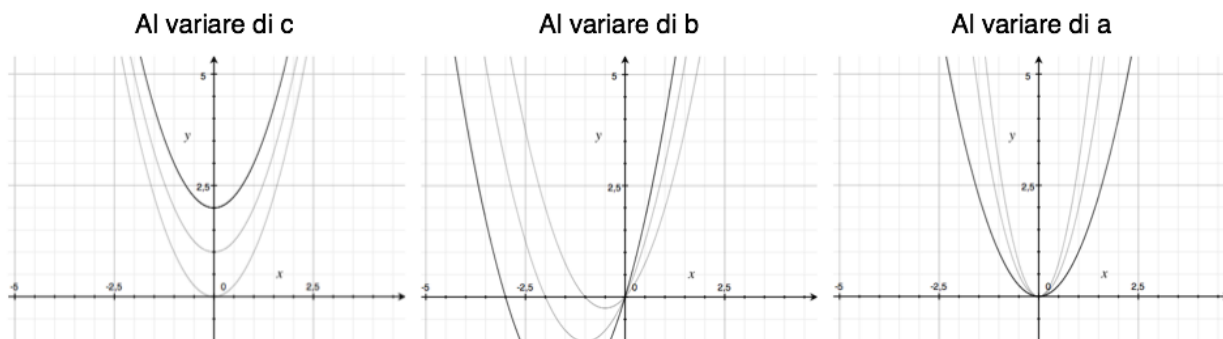
Equazioni indeterminate:

- $ax = b$ con $a, b = 0$
- $x = \frac{0}{0}$

Equazioni di secondo grado

Una equazione di secondo grado presenta sempre una incognita elevata al quadrato.

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad a \neq 0$$



Dimostrazione formula risolutiva

L'obiettivo è quello di isolare la x, e ci si arriva creando un polinomio al quadrato raccogliendo a (creando il doppio prodotto) e poi isolando il termine:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

L'equazione originale

$$(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$$

Cosa voglio che succeda per isolare la x

$$ax^2 + \left(\frac{2}{2}\right) \cdot \left(\frac{a}{a}\right) \cdot bx + \left(\frac{b^2}{4a} - \frac{b^2}{4a}\right) + c = 0$$

Servono altri elementi per costruire il quadrato

$$a \left(x^2 + \frac{2}{2} \cdot \frac{b}{a} x + \frac{b^2}{4a \cdot a} \right) - \frac{b^2}{4a} + c = 0$$

Raccolgo per a

$$a \left(x^2 + 2 \frac{b}{2a} x + \frac{b^2}{4a^2} \right) - \frac{b^2}{4a} + c = 0$$

Il quadrato è fatto

$$a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 = \frac{b^2}{4a} - c$$

Sposto a destra

$$\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}$$

Moltiplico per $\frac{1}{a}$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - \left(\frac{4a^2}{a}c\right)}{4a^2}$$

$$x + \frac{b}{2a} = \pm \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$$

$$x = \frac{\pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} - \frac{b}{2a}$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

mcm

Radice, qui si studia il segno della radice

Sposto l'ultimo termine, estraggo il denominatore che può essere sempre positivo, raccolgo

Il risultato

Tipi di equazioni

Pure

Quando presentano solo l'incognita al quadrato e un numero.

$$ax^2 + c = 0$$

Le equazioni pure si risolvono portando il termine noto a destra e dividendolo per a, per poi fare la radice. Il risultato della radice deve essere sia positivo che negativo.

Se non impossibili hanno sempre valori opposti.

Esempio

$$2x^2 - 18 = 0$$

$$-x^2 = \frac{18}{2}$$

$$-x = \pm \sqrt{9} = \pm 3$$

Spurie

Presentano l'incognita al quadrato e l'incognita di primo grado moltiplicata per un coefficiente.

$$ax^2 + bx = 0$$

Si risolvono raccogliendo x. Una soluzione è sempre 0 perché passa per l'origine.

Esempio

$$6x^2 - 18x = 0$$

$$-x(6x - 18) = 0$$

$$-x_1 = 0, x_2 = 3$$

Monomie

Quando contengono solo il primo termine al quadrato. La soluzione è sempre 0.

$$ax^2 = 0$$

Complete

Contengono tutti e tre i termini.

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Metodi di risoluzione

Formula risolutiva

$$\Delta = b^2 - 4ac$$
$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Discriminante

Il discriminante (Δ) può essere:

- $\Delta > 0$, quindi si può fare la radice quadrata e si ottengono due risultati reali e distinti
- $\Delta = 0$, due risultati reali coincidenti (alias, un risultato)
- $\Delta < 0$, non si può fare la radice di numeri reali, ma bisogna applicare i numeri immaginari, due risultati complessi e coniugati

Nel caso $\Delta < 0$, la formula da applicare è:

$$x_{1,2} = -\frac{b}{2a} \pm i \left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \right)$$

Formula ridotta

Si applica se b è pari:

$$x_{1,2} = \frac{-\frac{b}{2} \pm \sqrt{\frac{\Delta}{4}}}{a}$$

Scomposizione

Vedi documento su monomi e polinomi. La scomposizione di un polinomio di secondo grado ottiene:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

Relazioni tra x_1 e x_2

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$$
$$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

Prodotto-Somma

Per un trinomio con la forma $x^2 - bx + c$ basta trovare due numeri che **abbiano somma b (non $-b$) e prodotto c** per risolvere la equazione. Si avrà sempre un risultato nella forma $(x - x_1)(x - x_2)$. Nota che la a non è presente davanti a x^2 .

Metodo di Ruffini

Si può applicare il metodo di Ruffini per risolvere una equazione di secondo grado. Si faccia riferimento al documento sui Monomi e i Polinomi.

Metodo di completamento del quadrato

Si usa con equazioni del tipo $ax^2 + bx = 0$, dove $a > 0$. Si ottiene $(cx + d)^2 + e$, dove:

$$c = \sqrt{a}, \quad d = \frac{b}{2\sqrt{a}}, \quad e = -d^2$$

Equazioni irrazionali

Sono quelle che contengono una funzione sotto radice (quindi qualunque cosa contenga la incognita).

$$\sqrt[n]{f(x)} = g(x)$$

Se n è dispari

$$f(x) = [g(x)]^n$$

Se n è pari il segno del risultato della radice può essere positivo o negativo a seconda dell'argomento.

Se n è pari

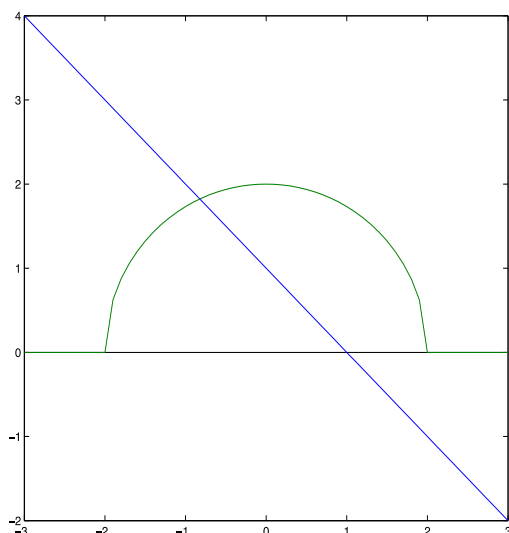
$$\begin{cases} f(x) = [g(x)]^n \\ g(x) \geq 0 \\ f(x) \geq 0 \end{cases}$$

Se n è pari, allora il risultato deve essere sempre positivo, per le proprietà delle radici, altrimenti la equazione non ha risultato. **Non serve porre il contenuto della radice maggiore o uguale a 0, dato che cambia a seconda della incognita. La radice deve risultare un numero maggiore o uguale a 0, questo serve, qualunque sia il contenuto.**

Casi particolari

$$\sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x) \\ f(x) \geq 0 \\ g(x) \geq 0 \end{cases}$$

Interpretazione grafica



Si consideri l'esempio:

$$\sqrt{4 - x^2} = -x + 1$$

Si può affermare che y è uguale alla intersezione delle due parti della equazione:

$$\begin{cases} y = \sqrt{4 - x^2} \\ y = -x + 1 \end{cases}$$

Si ha per y:

$$\begin{cases} 4 - x^2 \geq 0 \\ y \geq 0 \\ y^2 + x^2 = 4 \end{cases}$$

Si nota che risulta l'equazione di una circonferenza, definita solo per $y \geq 0$.

Equazioni di grado superiore a 2

Normalmente basta sostituire ad una incognita una incognita provvisoria, in modo da poter risolvere la equazione come una normale di secondo grado. Per esempio in una equazione con una incognita di quarto grado basta sostituire $x^2 = k$, quindi si avrà una equazione di secondo grado relativa a k. Si sostituiscono infine i valori di x^2 con i valori ricavati di k e si procede.

Equazioni esponenziali

$$a^x = b$$

$$a, b \in \mathbb{R}, a > 0$$

$$b \leq 0 \Rightarrow \mathcal{S} = \emptyset$$

Si deve cercare di avere una potenza prima e dopo l'uguale con la stessa base, in modo da uguagliare le funzioni agli esponenti:

$$a^{f(x)} = a^{g(x)} \Rightarrow f(x) = g(x)$$

Altrimenti si cerca di trasformarla in una equazione logaritmica per eseguire un cambiamento di base.

Esempio

$$3^{x+1} - 2^x = 2^{x+2} - 3^{x+1}$$

$$3^{x+1} + 3^{x+1} = 2^{x+2} + 2^x$$

$$3^{x+1} \Rightarrow 3^x \cdot 3^{-1}, \text{ si cerca di mettere tutto alla stessa potenza}$$

$$\left(3 + \frac{1}{3}\right) \cdot 3^x = (4 + 1) \cdot 2^x$$

$$\frac{3^x}{2^x} = 5 \cdot \frac{3}{10} \Rightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^x = \frac{3}{2}$$

$$x = 1$$

Esempio

$$2^{x+2} = 5^{x+1}$$

$$4 \cdot 2^x = 5 \cdot 5^x$$

$$\log(4 \cdot 2^x) = \log(5 \cdot 5^x)$$

$$\log 4 + \log 2^x = \log 5 + \log 5^x$$

$$x \cdot \log 2 - x \cdot \log 5 = \log 5 - \log 4$$

$$x = \frac{\log 5 - \log 4}{\log 2 - \log 5}$$

Equazioni Logaritmiche

Sono equazioni dove la x compare nell'argomento del logaritmo, bisogna fare in modo di ottenere **un solo logaritmo prima e dopo l'uguale**, in modo da eliminarli a vicenda, tenendo conto che gli argomenti devono essere maggiori di 0.

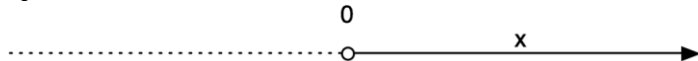
Metodi

- Si crea un sistema dove si pongono le **condizioni di esistenza**, quindi tutti gli argomenti maggiori di 0, si risolve il sistema e si trova l'intervallo di soluzioni valide (dominio D della incognita). Si risolve l'equazione tramite le proprietà dei logaritmi, si verifica che le soluzioni siano accettabili secondo l'intervallo trovato tramite il sistema.
- Si risolve l'equazione, quindi si sostituiscono una per volta le soluzioni nell'equazione iniziale per verificare quali sono valide.

Esempio

$$\log_3 x^4 + \log_3 x^3 + \log_3 x = 10$$

Si pone la condizione $x > 0$



$$4 \log_3 x + 3 \log_3 x + 2 \log_3 x + \log_3 x = 10$$

$$10 \log_3 x = 10 \Rightarrow \log_3 x = 1$$

$$\log_3 x = \log_3 3 \Rightarrow x = 3 \quad (3 > 0)$$

Consigli

- Effettuare la sostituzione $y = \log x$ per risolvere una equazione di secondo grado, trovare le soluzioni e sostituire nuovamente y con il logaritmo
- Alla fine della risoluzione per rimuovere il logaritmo cerca di rendere uguali i due termini, per esempio $\log_{10} x = \frac{1}{2} \Rightarrow 2 \log_{10} x = 1 \Rightarrow \log_{10} x^2 = \log_{10} 10 \Rightarrow x = \sqrt{10}$