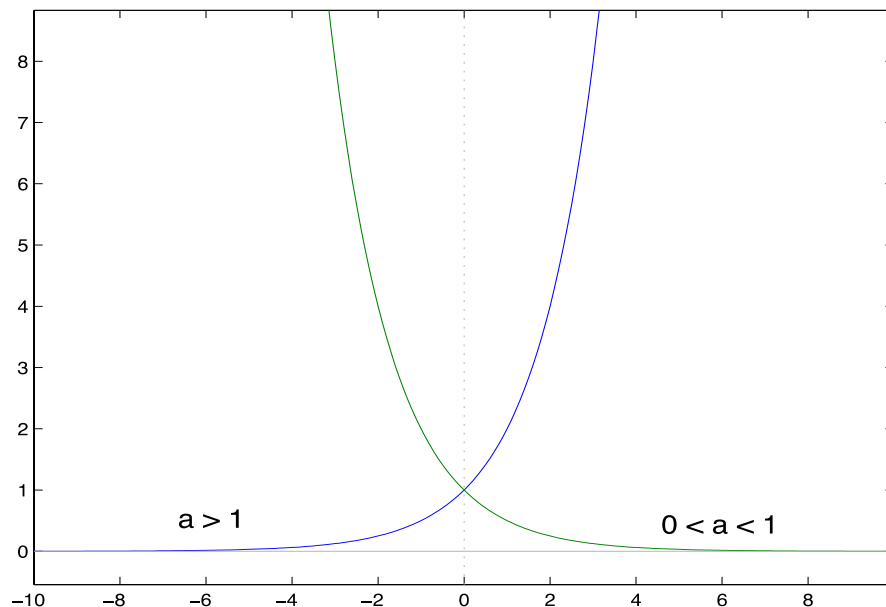


Esponenziali e Logaritmi

Funzione Esponenziale

$$y = a^x$$



Quando l'elevamento a potenza ha la base nota e la potenza incognita. Si dice funzione esponenziale quando la base è definita come e (numero di Eulero).

La funzione esponenziale ha le seguenti caratteristiche:

- Sempre strettamente crescente o decrescente, quindi biiettiva
- Sempre positiva
- Asintoto orizzontale nella ascissa che tende a $-\infty$
- Interseca con il punto 0,1

Essendo biiettiva, allora ha la funzione inversa detta logaritmo, tale che $f^{-1}(f(x)) = x \Rightarrow \log_a a^x = x$ (identità).

Elevamento a potenza

Elevare a potenza vuol dire moltiplicare il numero per sé stesso tante volte quanto il valore della potenza. Si segue l'ordine PEMDAS per eseguire le espressioni contenenti potenze.

$$\begin{aligned} \text{base} &\rightarrow a^{m \leftarrow \text{esponente}} \\ a^3 &= a \cdot a \cdot a \end{aligned}$$

Proprietà delle potenze

Somma/sottrazione degli esponenti in una moltiplicazione/divisione

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

$$\Rightarrow a^m \div a^n = a^{m-n}$$

Stessa base, esponenti diversi, moltiplicazione o divisione

Potenza di una potenza

$$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$$

Stesso esponente, diversa base, moltiplicazione/divisione

$$a^m \cdot b^m = (a \cdot b)^m$$

$$\Rightarrow a^m \div b^m = (a \div b)^m \quad \frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$$

Esponente 0

$$a^0 = 1$$

$$0^0 = \text{non definito}$$

Esponente 1

$$a^1 = a$$

Distribuzione nelle funzioni

$$\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$$

Base multipla di 10

$$10^2 = 100 \text{ (Il numero di zeri equivale all'esponente)}$$

Esponente negativo

$$a^{-5} = \frac{1}{a^5}$$

Esponente frazionario

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}, \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$$

- Se n è pari, allora $a \in \mathbb{R}^+$, in modo che $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a} = c$ (non $\pm c$)
 - Stessa cosa se m è dispari, a deve essere maggiore o uguale a 0, dato che il segno non verrebbe cambiato se fosse negativo
 - Se m è pari vale comunque che $a \geq 0$, dato che non si può invertire l'ordine delle operazioni (eseguendo prima la potenza o la radice), quindi $(a^m)^{\frac{1}{n}} \neq \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m$

▪ Per esempio $x^{\frac{4}{2}} \neq x^2$, si verifica solo per $x \geq 0$

- Se n è dispari, la radice non "blocca" il valore, quindi $a \in \mathbb{R}$

$$\text{○ Vale } (a^m)^{\frac{1}{n}} = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m$$

$$(a \cdot b)^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{m}{n}} \cdot b^{\frac{m}{n}} \text{ solo se } a, b \geq 0$$

$$\Rightarrow a^{\frac{m}{n}} \cdot a^{\frac{p}{q}} = a^{\left(\frac{m}{n} + \frac{p}{q}\right)}$$

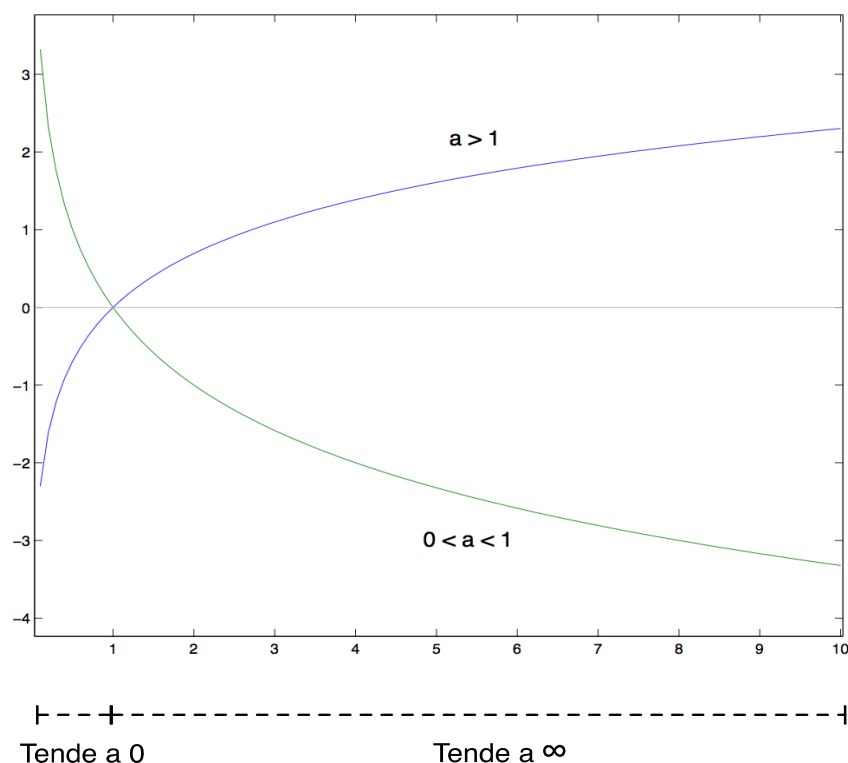
$$\Rightarrow \left(a^{\frac{m}{n}}\right)^{\frac{p}{q}} = a^{\left(\frac{m}{n} \cdot \frac{p}{q}\right)} \text{ solo se tutte le potenze hanno senso}$$

Con gli esponenti frazionari bisogna fare attenzione a non semplificare oltre un certo limite se non si conoscono i segni delle incognite, per esempio non si può semplificare $(a^2)^{\frac{1}{4}}$ perché se a fosse negativo, dovrebbe diventare positivo, mentre semplificando $(a^{\frac{1}{2}})$ verrebbe la radice di un numero negativo.

Funzione Logaritmica

La funzione inversa dell'esponenziale quando l'incognita è la potenza stessa. Il logaritmo è l'esponente da dare alla base a per ottenere x .

$$a^y = x \Leftrightarrow \log_a x = y$$



$$x = \log_{base} \text{argomento}$$

I logaritmi in base 10 si definiscono con la maiuscola, in base e (numero di Eulero) si indicano con $\ln$ o senza base:

$$\begin{aligned} \log_{10} a &\Leftrightarrow \text{Log } a \\ \log_e a &\Leftrightarrow \log a \Leftrightarrow \ln a \\ b > 0, a > 0, a &\neq 1 \end{aligned}$$

Il logaritmo di 1 vale sempre 0, dato che ogni numero elevato a 0 fa 1. Il logaritmo in base a di a vale sempre 1, dato che qualunque numero elevato a 1 fa il numero stesso:

$$\log_a a = 1 \Rightarrow \log_a \frac{1}{a} = -1$$

Questo vuol dire che la curva interseca con $y = 1$ nel punto corrispondente alla base del logaritmo, nel caso $\log_a x$.

Non può risultare un logaritmo inferiore di 0, dato che l'esponente non può cambiare il segno del valore (se minore diventa una radice, se maggiore una potenza).

Osservazione

Non si può calcolare il logaritmo in base 1, dato che sarebbe costante, quindi non monotona, quindi non invertibile.

Numero di Eulero (o Nepero)

$$e \approx 2,71828$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$

Valori fondamentali

$$\log_a 1 = 0$$

$$\log_a a = 1$$

$$\Rightarrow \log_a \frac{1}{a} = \log_{\frac{1}{a}} a = -1$$

$$\Rightarrow \log_a b \cdot \log_b a = 1 \text{ (dim. cambiamento base)}$$

Proprietà

Logaritmo di un prodotto/quotiente

$$\log_a (b \cdot c) = \log_a b + \log_a c$$

$$\Rightarrow \log_a \left(\frac{b}{c}\right) = \log_a b - \log_a c$$

Logaritmo di una potenza/radice

$$\log_a (b^n) = n \cdot \log_a (b)$$

$$\Rightarrow \log_a (\sqrt[n]{b}) = \frac{1}{n} \log_a (b)$$

Cambiamento di base

$$\log_a c = \frac{\log_b c}{\log_b a}$$

$$\Rightarrow \log_a b = \frac{1}{\log_b a}$$

$$\Rightarrow \log_{\frac{1}{a}} b = \frac{\log_a b}{\log_a \frac{1}{a}} = -\log_a b$$

Togliere la funzione di logaritmo

$$\log_a m = \log_a n \Rightarrow e^{\log_a m} = e^{\log_a n} \Rightarrow m = n$$

$$e^{\log x} = x, \quad \log e^x = x$$

Togliere la funzione esponenziale

$$a^x = b \Rightarrow \log_a a^x = \log_a b \Rightarrow x \cdot \log_a a = \log_a b \Rightarrow x = \log_a b$$

L'inverso della operazione precedente. Lo scopo è quello di **fare uscire dal logaritmo la funzione esponenziale**, e poi annullare l'argomento così viene isolato il logaritmo stesso.

Esempio

$$\log(x - 2) - \log(x - 3) = \log(4)$$

$$\log\left(\frac{x-2}{x-3}\right) = \log(4)$$

$$e^{\log\left(\frac{x-2}{x-3}\right)} = e^{\log(4)}$$

$$\frac{x-2}{x-3} = 4$$

$$x = \frac{10}{3}$$