

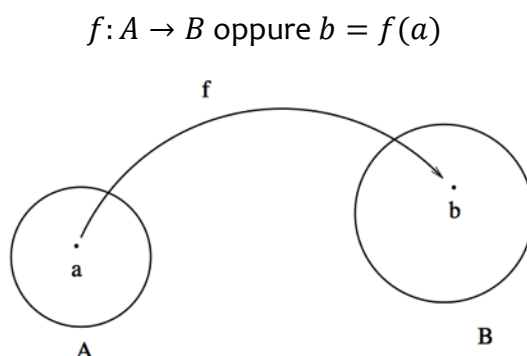
Funzioni

Definizione

Una **funzione** (detta anche **applicazione**) indica una relazione tra due o più variabili; è una legge che associa ad ogni elemento $a \in A$ uno e un solo elemento $b \in B$.

Collega il concetto di insiemi con le funzioni. Considerati due insiemi, ad ogni elemento di A (quindi tutti devono essere considerati, non possono esserci elementi senza corrispondenze) corrisponde un solo elemento di B, allora risulta definita una funzione da A a B.

La funzione è un rapporto che **lega gli elementi** di due insiemi.



$$\forall a \in A \exists! b \in B \mid f(a) = b$$

L'insieme A è il **dominio della applicazione**, si dice **immagine di A** (o codominio) l'insieme degli elementi di B che provengono da qualche elemento di A.

$$f(a) = \{b \in B \mid b = f(a), \forall a \in A\}$$

In parole umane, si dice funzione di A l'insieme di elementi appartenenti a B tale che ogni elemento sia la funzione di un elemento di A.

Esempio

$\{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 1\}$ è la equazione di una circonferenza. Non può essere una funzione perché ad un elemento del dominio corrispondono due elementi del codominio.

$$\{(x, y) \mid -1 \leq x \leq 1 \vee y = \sqrt{1 - x^2} \vee y = -\sqrt{1 - x^2}\}$$

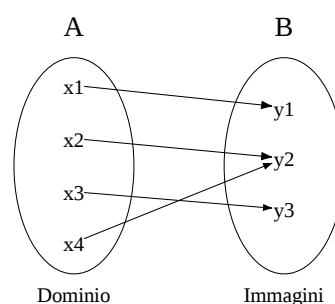
Esistono due corrispondenti valori di y per $\forall$ valore di x, non soddisfa la definizione di funzione. Inoltre una funzione deve avere **ogni elemento del dominio** collegato ad un elemento del codominio, altrimenti non è una funzione (in pratica normalmente si definisce per ogni x).

Glossario

Variabile Indipendente: la lettera x , il quale valore non può essere scelto arbitrariamente

Variabile Dipendente: la lettera $y = f(x)$, che rappresenta l'elemento nell'insieme B associato all'elemento nell'insieme A

Grafico: il sottoinsieme G_f di $A \times B$ definito come $G = \{(a, b) \in A \times B \mid b = f(a) \forall a \in A\}$, quindi l'insieme di coppie appartenenti al prodotto cartesiano di A e B , tale che b sia funzione di a per ogni a che appartiene all'insieme A



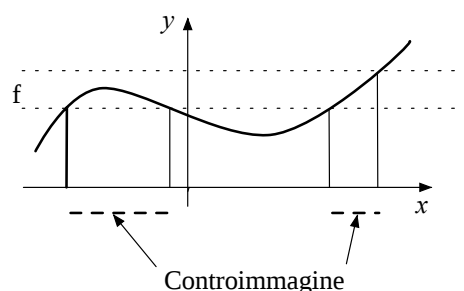
Dominio: data la funzione $f: A \rightarrow B$ il dominio è l'insieme A , i valori che possono essere assunti da x

Codominio: seguendo l'esempio precedente, il codominio è B , da non confondere con l'insieme immagine, che può essere un sottoinsieme del codominio

Immagine: si dice immagine di A tramite f l'insieme di tutti gli elementi $b \in B$ che provengono da qualche $a \in A$ (y in poche parole). $f(A) = \{b \in B \mid \exists a \in A \wedge f(a) = b\}$

Immagine inversa: sia $f: A \rightarrow B$ e $b \in B$, si dice immagine inversa di b (o controimmagine) e si indica con $f^{-1}(b)$ l'insieme degli elementi $a \in A$, tale che $f(a) = b$. Non serve che la funzione originale sia biunivoca. Prestare attenzione che **la immagine inversa non è la funzione inversa**.

$$F \subset B : f^{-1}(F) = \{a \in A \mid f(a) \in F\}$$



Funzione reale: una funzione che ha dominio in $\mathbb{R}$ o un suo sottoinsieme

Funzione crescente: in A , se $\forall a_1, a_2 \in A$, se $a_1 < a_2$ allora $f(a_1) < f(a_2)$

Funzione decrescente: Il contrario della affermazione precedente.

Funzione monotona: una funzione crescente o decrescente.

Funzione empirica: se il risultato della funzione si ottiene solo tramite osservazioni sperimentali e misurazioni.

Funzione matematica: se il risultato è possibile ottenerlo tramite un calcolo o una formula matematica.

Dominio massimale

Comprende tutti i valori che può assumere la variabile indipendente per i quali $f(x)$ ha senso in $\mathbb{R}$. In altre parole il dominio indica quali valori può assumere la funzione (campo di esistenza)

$$\text{dom } f = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \in \mathbb{R}\}$$

Esempio

$$f(x) = \frac{2x - 1}{(x - 1)(x + 2)}$$

$$\text{dom } f = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 1 \wedge x \neq -2\} = \mathbb{R} \setminus \{-2, 1\}$$

Funzioni razionali intere

Somma, sottrazione, moltiplicazione. $D = \mathbb{R}$

Funzioni razionali fratte

Divisione. $f(x) = \frac{A(x)}{B(x)} \quad B(x) \neq 0$

Radicali

Estrazione di radici a indice pari: $\sqrt[n]{f(x)} \quad D = \{x \mid f(x) \geq 0\}$

Estrazione di radici a indice dispari: $\sqrt[n]{f(x)} \quad D = \mathbb{R}$

Funzioni goniometriche

Seno e Coseno: $D = \mathbb{R}$

Tangente: $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$

Cotangente: $x \neq k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$

Logaritmi

$$\log_{g(x)} f(x) \quad g(x) \neq 1, \quad g(x) > 0, \quad f(x) > 0$$

Rappresentazione formale

Per rappresentare formalmente il dominio di una funzione si usa la composizione di funzioni:

$$x = f(g(x))$$

Esempio

$$f(x) = \sqrt{|x - 2|}$$

$$f(x) = \sqrt{y} \quad \text{dom: } [0, +\infty] = B$$

$$g(x) = |x - 2| \quad \text{dom: } \mathbb{R} = A$$

$$h(x) = f(g(x)) = \sqrt{|x - 2|}$$

$$\text{dom } h = \{x \in A \mid g(x) \in B\} = \{x \in \mathbb{R} \mid |x - 2| \geq 0\} = \mathbb{R}$$

Grafico

Si dice grafico di una funzione $G(f)$ dato $f: A \rightarrow B$:

$$G(f) = \{(a, b) \mid a \in A \wedge b = f(a) \in B\}$$

come l'insieme delle coppie costituite da un elemento di A e il corrispondente elemento di B. Il grafico è un sottoinsieme del prodotto cartesiano $A \times B$.

$$G(f) \subseteq A \times B$$

Controesempio

$A = \{(x, y) \in \mathbb{R} \mid x^2 + y^2 = 1\}$ non rappresenta un grafico poiché:

$$A = \left\{ \left(x, \sqrt{1 - x^2} \right) \mid x \in [-1, 1] \right\} \cup \left\{ \left(x, -\sqrt{1 - x^2} \right) \mid x \in [-1, 1] \right\}$$

Ad uno stesso elemento del dominio corrispondono più elementi del codominio.

Osservazione

Da notare un caso particolare in cui il grafico corrisponde con il prodotto cartesiano: $f(x) = a$

Classificazione

Da notare che una funzione può diventare iniettiva, suriettiva o biunivoca se considerata in un intervallo specifico. Non bisogna necessariamente considerare tutta la funzione in $\mathbb{R}$.

Suriettiva

Una funzione $f: A \rightarrow B$ si definisce suriettiva se l'insieme B corrisponde con l'immagine $f(A)$:

$$\forall b \in B \exists a \in A \mid f(a) = b$$

In parole umane, per ogni b che appartiene all'insieme B, esiste un a che appartiene all'insieme A, tale che la funzione di a è b .

Ogni elemento del codominio è immagine di un elemento del dominio, **l'insieme B ha tutti i valori (quindi y) associati.**

Esempio

Verificare che la funzione sia suriettiva $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad f(x) = 2x + 1$

Dato che $y \in \mathbb{R}, y = 2x + 1$

Bisogna capire se la funzione è definita per ogni y , quindi si isola la variabile e si determina il dominio:

$x = \frac{y-1}{2}$ è reale per qualunque valore di y .

Quindi la funzione è dimostrata essere suriettiva. Se avesse avuto elementi che non fanno parte di $\mathbb{R}$ (esclusioni dal dominio) non sarebbe stata suriettiva.

Esempio

Determinare se la funzione $f(x) = x + \frac{1}{x}$ definita in $f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ è suriettiva.

$\exists y = 0 \mid y = x + \frac{1}{x}$ non ha soluzioni in $\mathbb{R}$

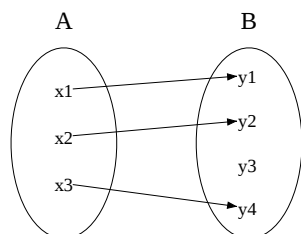
quindi $\nexists x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \mid x + \frac{1}{x} = 0$

L'insieme immagine deve coincidere con il codominio, ma qui non lo fa.

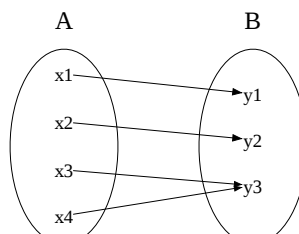
Iniettiva

Una funzione che **porta elementi distinti del dominio in elementi distinti del codominio**.

Quindi una funzione è iniettiva solo se non ci sono valori nel dominio che hanno lo stesso valore nel codominio. In altre parole, ogni elemento del codominio è immagine al massimo di un elemento del dominio. **Nessuna collisione**.



Funzione iniettiva



Funzione non iniettiva

Quindi se si considera un insieme $A=\{a,b\}$, dove $a \neq b$, la funzione è iniettiva se implica che $f(a) \neq f(b)$. f è iniettiva se viene soddisfatta la seguente condizione:

$$\forall a, b \in A, a \neq b \Rightarrow f(a) \neq f(b)$$

In un diagramma cartesiano si verifica se per qualunque retta orizzontale, la funzione viene intersecata non più di una volta.

Contronominale

$$\forall a, b \in A, f(a) = f(b) \Rightarrow a = b$$

Esempio

Verificare se $f(x) = \frac{2x+1}{x-1}$ è iniettiva

Dominio:

$$f: \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R}$$

Dimostrazione

Bisogna dimostrare che per ogni coppia di elementi appartenenti al dominio, se $f(a) = f(b)$ allora $a = b$.

$$\frac{2a+1}{a-1} = \frac{2b+1}{b-1} \rightarrow \text{svolgendo} \rightarrow a = b$$

Si verifica che la funzione è iniettiva.

Quando si svolgono esercizi che producono alcuni risultati fuori dal dominio, questi non vanno considerati. Per esempio se risulta $a \cdot b = -1 \vee a = b$ con un dominio $\mathbb{R}^+$, allora la prima è da scartare, e la funzione è iniettiva.

Biunivoca

Se una funzione è sia iniettiva che suriettiva, allora è biunivoca. Quindi tutti gli elementi del codominio (insieme B) devono avere un solo elemento del dominio tale che $f(A)=B$.

In altre parole, **insiemi A e B senza valori non associati, nessuna collisione**.

Per dimostrare che una funzione è biunivoca basta dimostrare che è suriettiva e iniettiva.

$$\forall y \in B \exists! x \in A \mid f(x) = y$$

Contronominale

La funzione $f: A \rightarrow B$ non è biunivoca se e solo se

$$\neg[f \text{ iniettiva} \wedge f \text{ suriettiva}]$$

Funzioni Monotone

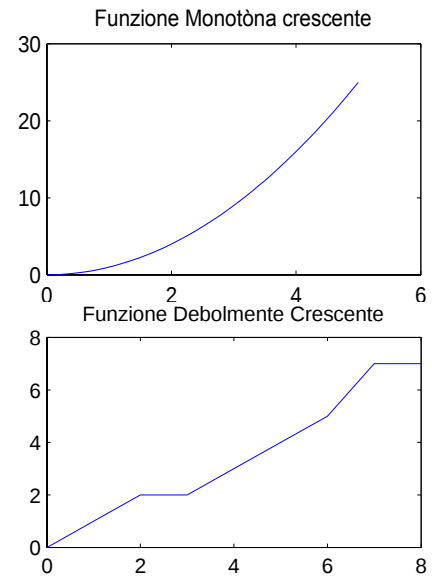
Sono funzioni che presentano le seguenti caratteristiche:

- $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$ - strettamente crescente
- $x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$ - strettamente decresc.
- $x_1 \leq x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$ - (debolmente) cresc.
- $x_1 \geq x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$ - (debolmente) decresc.

Questo quando si considera la funzione in un intervallo delimitato da due punti x_1 e x_2 .

La funzione conserva l'ordine, se due punti sono in un certo ordine le loro immagini saranno in quell'ordine.

Una funzione strettamente monotona è iniettiva.



Proprietà

- La somma di funzioni monotone di un tipo, dà una funzione monotona dello stesso tipo
- Se f è monotona dello stesso tipo in $(a,b]$ e $[b,c)$ allora è monotona in (a,c)
- Un multiplo positivo mantiene in segno intatto, quindi la funzione rimane dello stesso tipo, un multiplo negativo cambia l'andamento
- La composizione di due funzioni monotone è monotona

Osservazione

Una funzione costante è sia debolmente crescente che debolmente decrescente.

Dimostrazione

Si voglia dimostrare che la funzione $f(x) = x^3$ è strettamente crescente.

Quindi si vuole dimostrare che $x_1^3 > x_2^3 \Leftrightarrow x_1^3 - x_2^3 > 0 \Leftrightarrow (x_1 - x_2)(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2) > 0$

Per la legge di annullamento del prodotto si avrà:

$x_1 > x_2$ (dimostrato strettamente crescente)

$x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 > 0$ (sempre soddisfatta $\forall x_1, x_2, \Delta < 0$)

Dimostrazione

Si voglia dimostrare che una funzione $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ è debolmente crescente.

$$\forall x, y \in A [x < y \Rightarrow f(x) \leq f(y)] \wedge [x < y \Rightarrow f(x) \geq f(y)]$$

Questo dice che se $x \leq y$ allora la immagine di x non può essere minore della immagine di y .

$$\forall x, y \in A [x < y \Rightarrow [f(x) \leq f(y) \wedge f(x) \geq f(y)]]$$

$$\forall x, y \in A [x < y \Rightarrow [f(x) = f(y)]]$$

Non può esistere che $f(x) < f(y)$ se $x < y$. Dato che vengono definite una funzione $(=)$ e una funzione crescente $(x < y)$ allora la funzione è debolmente crescente.

Esempio

Dimostrare che è debolmente crescente:

$$\begin{cases} 1 - x^2, & x \leq 0 \\ 1, & x < 0 \end{cases}$$

Presi $x_1, x_2 \leq 0$, partiamo dalla relazione $x_2 < x_1 \Rightarrow (x_1 - x_2) > 0 \vee (x_2 + x_1) < 0$, quindi $(x_1 - x_2)(x_1 + x_2) < 0 \Rightarrow x_1^2 < x_2^2$

A questo punto si ricostruisce la funzione $1 - x_2^2 < 1 - x_1^2$, e questo dice che $f(x_2) < f(x_1)$, quindi la funzione è strettamente crescente nel primo tratto.

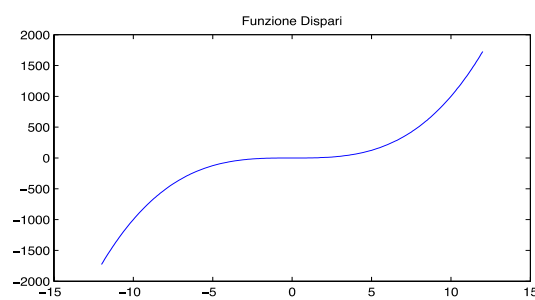
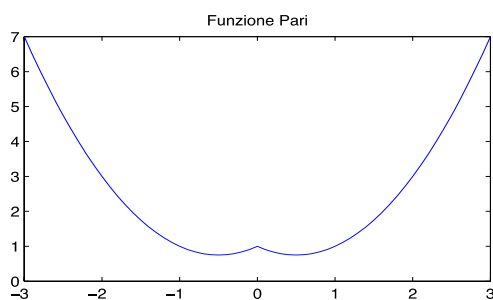
Per quello che riguarda il secondo tratto:

$$x_2 < 0 < x_1 \Rightarrow f(x_2) < f(0) = 1 = f(x_1) \Rightarrow f(x_2) < f(x_1)$$

Funzioni pari e dispari

Sono funzioni che presentano una simmetria.

- Pari $f(-x) = f(x)$ Simmetrico rispetto all'asse y
- Dispari $f(-x) = -f(x)$ Simmetrico al contrario rispetto all'asse y



Da notare che nelle funzioni pari e dispari, il nome deriva dal tipo di esponente della funzione (per esempio $f(x) = x^2$ ha esponente pari, ed è simmetrica nel primo modo, mentre $f(x) = x^3$ ha il secondo tipo di simmetria).

Spesso la simmetria di una funzione può aiutare a semplificare e limitare i calcoli.

Funzione Identità

È una funzione che associa ad ogni elementi l'elemento stesso.

Dato $f: A \rightarrow B$, si dice identità su A se $f(a) = a, \forall a \in A$

Osservazioni

- La funzione è biunivoca
- Il grafico è dato dalla diagonale $\{(a, a) \mid a \in A\}$
- L'identità in $\mathbb{R}$ è la bisettrice del primo e il terzo quadrante
- Se $f: A \rightarrow B$ è biunivoca e $A, B \subseteq \mathbb{R}$, il grafico di f^{-1} è simmetrico rispetto alla identità

Funzione costante

$f: A \rightarrow B$ è detta costante se $\exists! k \in B \mid f(a) = k \forall a \in A$, quindi se l'insieme immagine contiene un solo valore.

Funzioni definite a tratti

Sono funzioni definite da leggi diverse su sottoinsiemi disgiunti del dominio (che quindi non hanno elementi in comune).

In parole povere, dati certi intervalli che non hanno valori in comune (**non** come $x \geq 1$ insieme a $x \leq 0$) la funzione definisce regole diverse a seconda dell'intervallo scelto.

$$f(x) = \begin{cases} \text{legge}, & \text{intervallo} \\ \text{legge}, & \text{intervallo} \end{cases}$$

Valore assoluto

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = |x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

Funzione segno

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$

Restrizione

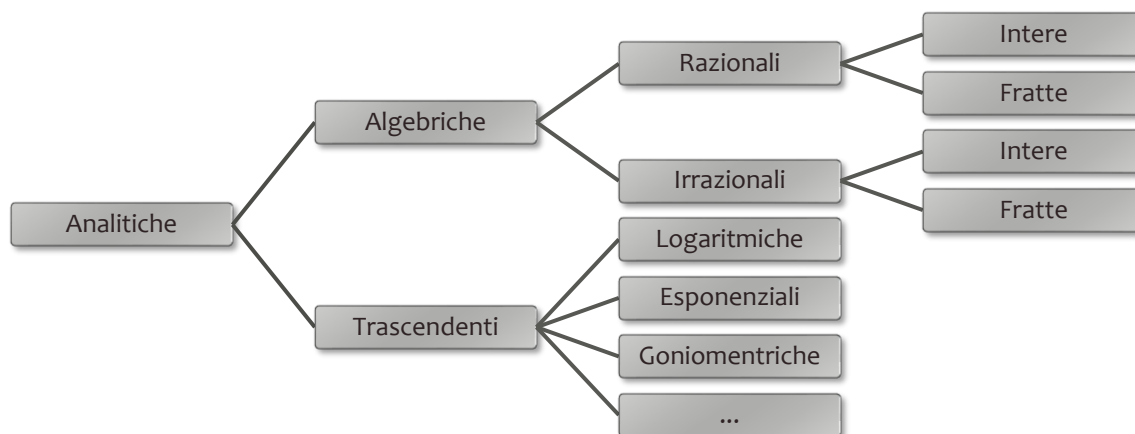
Quando si considera la funzione solo in determinati intervalli, si limita il campo di appartenenza.

Dati $f: A \rightarrow B$ e $E \subseteq A$

Diciamo restrizione di f ad E la funzione $f|_E: E \rightarrow B \mid f|_E(x) = f(x) \forall x \in E$

Quando si applica la restrizione ad una funzione, si ottiene una funzione diversa, e vengono spesso cambiate le proprietà.

Tipi di funzione



Studio di una funzione

Senza l'ausilio di un grafico, bisogna stabilire in modo algebrico le seguenti caratteristiche:

- Insieme immagine
- Iniettività
- Suriettività
- Biunivocità
- Eventuale funzione inversa

Esempio

$$f(x) = \begin{cases} x + 1, & x > 0 \\ 2 + 2x, & x \leq 0 \end{cases}$$

- Verificare iniettività sui singoli tratti, se non lo è in almeno un tratto allora non lo è globalmente
 - Usa il metodo $x_1 = x_2$
- Verifica se è iniettiva su tutti i tratti
 - $\begin{cases} x + 1 = k \\ 2 + 2x = k \end{cases}$
 - $\begin{cases} x = k - 1 \\ x = \frac{k-2}{2} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} k - 1 > 0 \\ \frac{k-2}{2} \leq 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} k > 1 \\ k \leq 2 \end{cases}$
 - Le due equazioni condividono un intervallo compreso tra 1 e 2, quindi la funzione non è iniettiva
- Verifica suriettività sui singoli tratti
 - Tutte le funzioni sono suriettive, dato che il codominio è definito per $\mathbb{R}$
- Verifica suriettività su tutti i tratti
 - $k > 1 \cup k \leq 2$ quindi non ci sono intervalli vuoti, la funzione a tratti è suriettiva
- Non può essere biunivoca

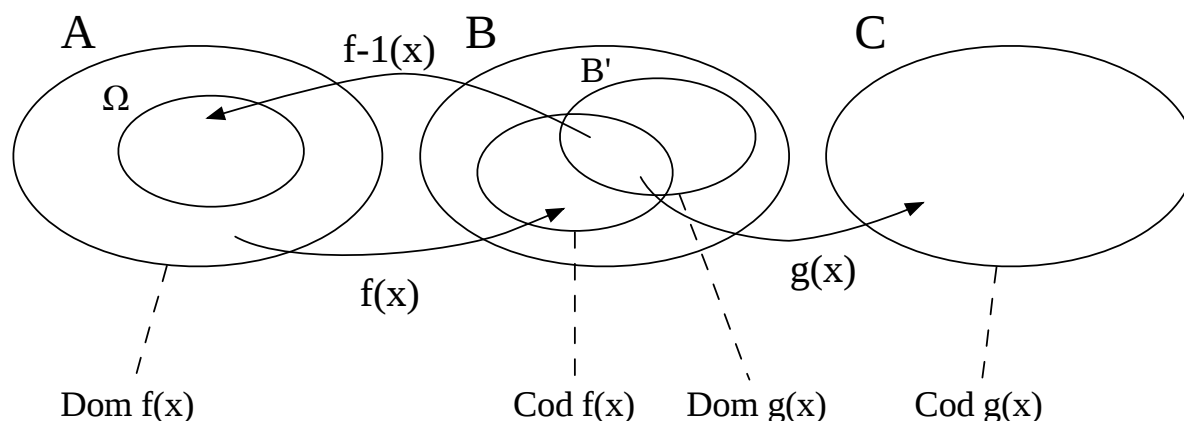
Composizione di funzioni

Si intende una composizione di funzioni, l'applicazione di una funzione al risultato di un'altra funzione. Quindi se si ha la funzione f che trasforma ogni elemento dell'insieme X in uno di Y , e una funzione g che trasforma elementi di Y in elementi di Z , si definisce composizione di f e g la funzione che trasforma gli elementi di X in elementi di Z .

$$f: A \rightarrow B, \quad g: B \rightarrow C, \quad g \circ f: X \rightarrow Z$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

Nota: la funzione f agisce prima della funzione g .



Notare che la funzione composta $f \circ g$ è possibile eseguirla, se e solo se **l'insieme immagine di f condivide elementi con il dominio di g** , ossia, se l'intersezione dei due insiemi non dà $\emptyset$ (vedi sotto).

$$f(A) \cap \text{dom } g \neq \emptyset$$

Proprietà

La composizione inoltre gode della proprietà associativa, quindi $f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$.

Inoltre se entrambe le funzioni considerate sono suriettive, allora anche la funzione composta lo sarà. Questo vale anche per la iniettività, quindi per la biunivocità.

Si noti che se $g \circ f$ è biunivoca, allora esiste la funzione inversa $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

Dimostrazione

Si dimostri che se f e g sono iniettive, allora anche la funzione composta lo è.

$$\forall a_1, a_2 \in A, a_1 \neq a_2 \Rightarrow f(a_1) \neq f(a_2)$$

Si ponga $f(a_1) = b_1$ e $f(a_2) = b_2$, che sono $\in B$ che è dominio di g

$$b_1 \neq b_2 \Rightarrow g(b_1) \neq g(b_2)$$

$$g(f(a_1)) \neq g(f(a_2))$$

$$(g \circ f)(a_1) \neq (g \circ f)(a_2)$$

Osservazione

Dati gli insiemi $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$

$$(g \circ f) \circ (f^{-1} \circ g^{-1}) = \text{id}_C$$

(nota, prima il secondo termine, poi il primo, parti da C , arrivi in A , ritorni in C)

Si dimostra aggiungendo in mezzo la identità di f ($f \circ f^{-1}$) e applicando la proprietà associativa.

Osservazione

Possiamo definire la funzione composta tra $f: A \rightarrow B$ e $g: C \rightarrow D$ a patto che $f(A) \cap C \neq \emptyset$

Ovvero quando $\exists x \in A \mid f(x) \in B \cap C$ e quindi $\exists g(f(x)) \in D$

Si può concludere che $g \circ f: \Omega \rightarrow D$ dove $\Omega = f^{-1}(f(A) \cap C)$ e $\Omega \subseteq A$

Ω è l'insieme controimmagini dell'insieme intersezione $f(A)$ e $\text{dom } g$.

Esempio

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = x^2$$

$$g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad g(x) = 3x + 1$$

$$(g \circ f)(z) = g(f(z)) = 3 \cdot z^2 + 1$$

Osservazione

Data $f: A \rightarrow B$ biunivoca, allora $\exists f^{-1}: B \rightarrow A$, $\exists (f^{-1} \circ f)(a) = f^{-1}(f(a)) = a = I_A(a) \forall a \in A$ (funzione identità)

Esempio

Si voglia fare la composizione $(g \circ f)(x)$ di $f(x) = x^2 - 1$ e $g(x) = \begin{cases} \sin x, & x \geq 5 \\ \cos x, & x < 5 \end{cases}$

La funzione è definita in tutto $\mathbb{R}$, si chiama la variabile di $g(x)$ y .

$$x - f \rightarrow f(x) = g - y \rightarrow g(y) = z$$

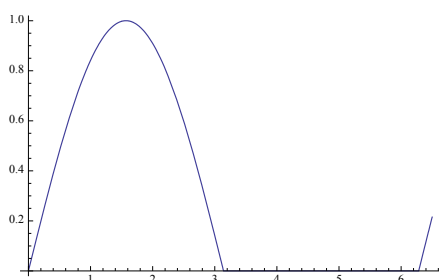
$$g(y) = \begin{cases} \sin y, & y \geq 5 \\ \cos y, & y < 5 \end{cases}$$

Nota bene che y va sostituita con $f(x)$, quindi $x^2 - 1$. Al posto di $y \geq 5$ va sostituito $f(x) \geq 5$, **non** $x \geq 5$.

Si ottiene quindi:

$$g(y) = \begin{cases} \sin(x^2 - 1), & x \leq -\sqrt{6} \vee x \geq \sqrt{6} \\ \cos(x^2 - 1), & -\sqrt{6} < x < \sqrt{6} \end{cases}$$

Parte positiva e negativa

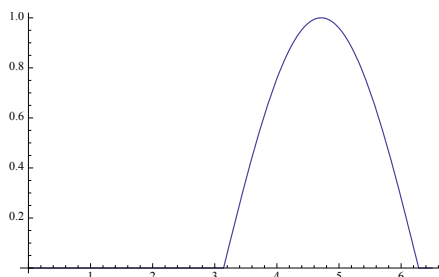


$$f^+(x) = \frac{f(x) + |f(x)|}{2} = \begin{cases} f(x), & f(x) \geq 0 \\ 0, & f(x) < 0 \end{cases}$$

Osservazione

La funzione positiva è sempre maggiore o uguale a 0, qualunque sia il valore di x , inoltre:

$$f^+(x) = \max\{f(x), 0\} \forall x$$



$$f^-(x) = \frac{-f(x) + |f(x)|}{2} = \begin{cases} 0, & f(x) \geq 0 \\ -f(x), & f(x) < 0 \end{cases}$$

Osservazione

Anch'essa è sempre ≥ 0 , inoltre:

$$f^-(x) = \max\{-f(x), 0\} \forall x$$

Osservazione

$$f(x) = f^+(x) - f^-(x), \quad \forall x \in \text{dom } f$$

$$|f(x)| = f^+(x) + f^-(x), \quad \forall x \in \text{dom } f$$

Funzioni periodiche

La funzione $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ si dice periodica di periodo T se sono soddisfatte le condizioni:

1. $\forall x, x \in A \Leftrightarrow x + T \in A$
2. $\forall x \in A, f(x + T) = f(x)$

Osservazione

Quando il dominio $A = \mathbb{R}$, allora la definizione si riduce al punto 2.

Osservazione

Ha senso parlare di periodo minimo T per una funzione f , ma non è detto che esista.

Osservazione

Se f è T periodica e g è $\frac{T}{k}$ periodica, allora $f + g$ è T periodica, ovvero il massimo tra i due. Per determinare la periodicità comune di due funzioni bisogna:

1. Prendere i due periodi
2. Trasformare le frazioni in interi facendo m.c.m.
3. Fare m.c.m dei numeratori
4. Dividere il valore per il denominatore comune

Esempio

Periodi $\frac{2}{3}$ e $\frac{4}{7}$ sommati risultano 4, dato che diventano $\frac{14}{21}$ e $\frac{12}{21}$, il m.c.m. tra 14 e 12 è 84, che diviso per 21 fa 4.

Osservazione

La funzione $f + g = \frac{\sqrt{2}}{2}$ non è periodica, dato che non è razionale.

Calcolo del periodo

Esempio

Si ha una funzione $f(x) = \sin 3x$, è periodica? Se sì, qual è il periodo minimo?

dom: $\mathbb{R}$, quindi basta verificare la seconda regola.

dim. che $f(x + T) = f(x)$

$$f(x + T) \Rightarrow \sin[3(x + T)] \Rightarrow \sin(3x + 3T),$$

$$\sin 3x \cdot \cos 3T + \cos 3x \cdot \sin 3T = \sin 3x,$$

$$\sin 3x \cdot \cos 3T - \sin 3x + \cos 3x \cdot \sin 3T = 0,$$

$$\sin 3x \cdot (\cos 3T - 1) + \cos 3x \cdot \sin 3T = 0$$

Si applica la formula di addizione

Dato che si deve dim. uguaglianza

Si porta al primo membro, raccolgo
(secondo me manca un passaggio)

Ovvero

$$\begin{cases} \cos(3T - 1) = 0 \\ \sin 3T = 0 \end{cases}, \sin x = 0 \text{ quando multiplo di } \pi$$

$$3T = 2k\pi \Rightarrow T = \frac{2}{3}k\pi \text{ che è soluzione comune del sistema}$$

Dunque, $\sin 3x$ è $\frac{2}{3}\pi$ periodico, e $\frac{2}{3}\pi$ è il periodo minimo.

Mantissa

La parte decimale di un numero, quindi è definita da $x - [x]$, quindi la funzione meno la **parte intera** (arrotondamento per difetto del risultato).

Esempio

$$x = 3,52$$

$$x - [x] = 0,52$$