

Insiemi numerici

Numeri naturali $\mathbb{N}$

Numeri interi positivi o nulli.

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$$

Numeri relativi $\mathbb{Z}$

Numeri interi dotati di segno.

$$\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots\}$$

Numeri razionali $\mathbb{Q}$

Sono i numeri della forma $\frac{a}{b}$ con $a \in \mathbb{N} \wedge b \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ e sono definite le operazioni di somma e moltiplicazione. (per la sottrazione basta considerare la somma con un numero negativo, per la divisione è la moltiplicazione per l'inverso dell'altro)
In pratica è l'insieme di numeri che possono essere espressi come frazione.

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{m}{n} \mid (m, n \in \mathbb{N}) \wedge (n \neq 0) \right\}$$

Somma

$$+ : \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$$

Va inteso come coppia di numeri, non come tutte le possibilità.

Proprietà:

- Associativa
- Commutativa

$$\exists \text{ elemento neutro } \rightarrow 0 \mid x + 0 = x \quad \forall x \in \mathbb{Q}$$

$$\exists \text{ opposto } \forall x \in \mathbb{Q} \exists y \in \mathbb{Q} \ y = -x \mid x + y = 0$$

Moltiplicazione

$$\cdot : \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$$

Proprietà:

- Associativa
- Commutativa
- Distributiva

$$\exists \text{ elemento neutro } \rightarrow 1 \mid x \cdot 1 = x \quad \forall x \in \mathbb{Q}$$

$$\exists \text{ opposto } \forall x \in \mathbb{Q} \setminus \{0\} \exists y \in \mathbb{Q} \ y = \frac{1}{x} \mid x \cdot y = 1$$

Relazione d'ordine totale $\leq$

Si usa per confrontare o ordinare elementi appartenenti a $\mathbb{Q}$. $\forall x, y \in \mathbb{Q}$ vale solo uno dei casi: $x < y \vee x = y \vee x > y$

$$x \leq y \Leftrightarrow 0 \leq y - x \quad \forall x, y \in \mathbb{Q}$$

Assiomi

- $a \leq b \wedge c \in \mathbb{Q} \Rightarrow a + c \leq b + c$
- $a \leq b \wedge c \geq 0 \Rightarrow a \cdot c \leq b \cdot c$

Dimostrazione

Dimostrare che $x \leq y \wedge z \leq 0 \Rightarrow zx \geq zy$

Per le proprietà di ordine $a \leq b, c \in \mathbb{R} \Rightarrow a + c \leq b + c, \quad a \leq b, c \geq 0 \Rightarrow a \cdot c \leq b \cdot c$

$z \leq 0 \Rightarrow -z \geq 0$

$x \leq y \wedge -z \geq 0 \Rightarrow -zx \leq -zy$

Applicazione dell'assioma

$0 \leq zx - zy \rightarrow zy \leq zx \rightarrow zx \geq zy$

Numeri reali $\mathbb{R}$

È l'insieme numerico che soddisfa l'assioma di **Dedekind** (completezza) insieme a tutti gli assiomi dei numeri razionali.

Sono numeri ai quali si può attribuire uno sviluppo decimale finito o infinito. Possono essere positivi, negativi o nulli, comprendono numeri interi, razionali, irrazionali, trascendenti. Possono avere anche una rappresentazione decimale illimitata ma non periodica.

Fanno parte di $\mathbb{R}$ $e, \pi, \sqrt{2}$. I numeri reali si possono solo approssimare trasformandoli in numeri razionali, altrimenti vanno utilizzati con notazioni più astratte o nella loro forma originale (per esempio $\sqrt{2}$).

I numeri reali possono essere **irrazionali** (quindi non fanno parte di $\mathbb{Q}$, la espansione decimale è infinita e non periodica) e anche **trascendenti** (numero irrazionale che non è algebrico)

Numeri immaginari $\mathbb{I}$

Una estensione dei numeri reali nata per consentire di trovare tutte le soluzioni a equazioni polinomiali. Si usa i come unità immaginaria, tale che $i^2 = -1$ (impossibile). Sostituendo alcune parti della equazione con i e poi rimettendo il valore originale, si riesce ad arrivare alla soluzione.

Sistemi di numerazione

Si intende il modo di esprimere e rappresentare dei numeri attraverso un insieme di simboli. Un sistema di numerazione può essere **posizionale** quando ogni carattere assume un significato diverso a seconda della sua posizione (numeri arabi) e **additivo** quando invece il numero è espresso da una somma dei caratteri che lo caratterizzano (numeri romani). I numeri immaginari si indicano seguendo i al numero.

Basi di numerazione

Per base numerica si intende il numero di cifre distinte incluso lo 0, che il sistema usa per rappresentare i numeri. Si usa nel sistema di numerazione posizionale per determinare quante cifre usare in una posizione.

La base di numerazione comunemente usate è 10, quindi le cifre vanno da 0 a 9, dopodiché si utilizza la posizione successiva nel numero (per esempio dopo 9 viene 10, si usa la posizione delle decine).

Nel sistema esadecimale si conta da 1 a 16, per poi passare alla cifra successiva, quindi da 0 a F. Per esempio F3A0 corrisponde a 62368 in decimale.