

# Monomi e Polinomi

---

## Glossario

**Monomio:** espressione letterale scritta come il prodotto tra un numero e più lettere. Il numero si definisce coefficiente della parte letterale.

**Monomio ridotto in forma normale:** quando è scritto come un prodotto di numeri e lettere tutti diversi fra loro.

**Grado di un monomio:** la somma degli esponenti delle lettere contenute in un monomio. Per esempio  $4a^5b^2c$  è di ottavo grado.

**Monomi simili:** quando due monomi hanno la stessa parte letterale.

**Coefficiente:** la parte numerica di un monomio.

**Polinomio:** somma algebrica tra 2 o più monomi non simili.

**Termini del polinomio:** i monomi che lo compongono.

**Grado di un polinomio:** il grado del suo monomio maggiore.

**Polinomio completo rispetto ad una lettera:** quando di quella lettera compaiono tutti i gradi fino a 0. Per esempio  $2a^3 + a^2 - 7a + 8$ .

**Polinomio omogeneo:** quando tutti i monomi che lo compongono hanno lo stesso grado.

## Operazioni tra monomi

### Addizione e sottrazione

Si esegue solo tra monomi simili, si sommano o sottraggono solo le parti numeriche (coefficienti), lasciando invariate le parti letterali.

$$-3ac + 5ac - 6a + 2a = (-3 + 5)ac + (-6 + 2)a = 2ac - 4a$$

### Moltiplicazione e divisione

Il risultato è il prodotto o quoziente dei coefficienti e delle parti letterali.

$$2ax^3 \cdot (-3x^2y^4) \cdot \left(\frac{5}{12}a^5\right) = -\frac{5}{2}a^6x^5y^4$$

$$5ax^3 : (-2x^2y^4) = -\frac{5}{2}a^{1-0}x^{3-2}y^{0-4} = -\frac{5}{2}a^1x^1y^{-4} = -\frac{5ax}{2y^4}$$

### Potenza

Quando si eleva a potenza basta elevare coefficiente e tutte le lettere.

$$(3a^4b^2)^3 = 3^3a^{4 \cdot 3}b^{2 \cdot 3} = 9a^{12}b^6$$

# Operazioni tra polinomi

## Addizione e sottrazione

La somma o sottrazione si esegue solo tra i termini simili dei due polinomi. Si sommano solo i coefficienti, non le parti letterali.

## Moltiplicazione e divisione

Si applica la proprietà distributiva, moltiplicando ogni termine del polinomio per il monomio, o ogni termine del polinomio per ogni termine dell'altro polinomio. Stessa cosa per la divisione. Non vale per la divisione tra due polinomi.

## Divisione tra due polinomi

Per quello che riguarda la divisione tra un polinomio e un monomio, basta applicare la proprietà distributiva.

$$(8a^2b + 4a):(2a) = (8a^2b:2a) + (4a:2a)$$

**Per verificare la divisibilità tra due polinomi** (argomento gettonato nei test), verifica che il risultato possa essere il quesito diviso ai minimi termini e poi diviso. Per esempio  $12a^2 - 18b^2$  è divisibile per  $\sqrt{2}a - \sqrt{3}b$  perché se il risultato viene elevato al quadrato, viene  $2a^2 - 3b^2$  che equivale al primo polinomio diviso ai minimi termini.

## Metodo normale:

Dati due polinomi A e B, il loro quoziente Q, è quel polinomio per cui si ha  $A:B = Q$  se  $Q \cdot B = A$ .

Se Q non è il quoziente esatto della divisione, allora  $Q \cdot B + R = A$ , dove R è il resto.

Esempio  $(2a^3 - 1 + 3a - 5a^2 + a^4):(3 - 2a + a^2)$

1. ordinare in modo decrescente i polinomi A e B  
 $(+a^4 + 2a^3 - 5a^2 + 3a - 1):( +a^2 - 2a + 3)$
2. dividere il 1° termine di A per il 1° termine di B, si ottiene il 1° termine del quoziente
3. moltiplicare il quoziente ottenuto per ogni termine del divisore B, scrivendo il risultato del prodotto, cambiato di segno, sotto il dividendo e si esegue la somma
4. dividere il 1° termine del 1° resto parziale  $(+4a^3)$  per il 1° termine del divisore  $(a^2)$  e si ottiene il 2° termine del quoziente
5. procedere come nel punto 3

NB: la divisione finisce quando il grado del resto parziale è minore del grado del polinomio divisore.

**VERIFICA** del risultato ottenuto: se  $Q \cdot B + R = A$  allora il risultato è esatto.

Nota: copia-incolla di un metodo non ben compreso

### Metodo di Ruffini:

Serve per risolvere più rapidamente la divisione tra polinomi , quando il polinomio divisore è un binomio di primo grado del tipo  $(x \pm k)$  , con  $k \in \mathbb{R}$

Esempio  $(2x^4 - 3x^3 + 5x^2 - x + 1) : (x - 4)$

a) si predisporre uno schema come questo , in cui si sistemano solo i coefficienti del dividendo , separati dal termine noto del dividendo

|    |   |    |    |     |     |  |
|----|---|----|----|-----|-----|--|
|    | 2 | -3 | 5  | -1  | 1   |  |
| +4 |   | 8  | 20 | 100 | 396 |  |
|    | 2 | 5  | 25 | 99  | 397 |  |

b) in basso a sinistra si scrive il termine noto del divisore, cambiato di segno , quindi + 4

c) si abbassa il 1° coefficiente del dividendo , lo si moltiplica per il numero scritto in basso a sinistra e si scrive il loro prodotto sotto il 2° coefficiente del dividendo

d) si esegue la somma tra i due termini che occupano il 2° posto , si ottiene 5 che si scrive in colonna

e) si moltiplica l'ultimo risultato 5 per il numero in basso a sinistra ( + 4 ) , si scrive il prodotto sotto il 3° coefficiente del dividendo e si esegue la somma, ottenendo 25

f) si prosegue sempre così , fino ad arrivare all'ultima somma del termine noto.

Dallo schema finale si ricavano i coefficienti del Quoziente e il resto della divisione.

Il grado del quoziente è  $(4 - 1) = 3$  , pertanto il quoziente è :  $Q = 2x^3 + 5x^2 + 25x + 99$   $R = 397$

### Teorema fondamentale dell'Algebra

Dato un polinomio  $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$  allora  $\exists x_1 \dots x_n$  numeri appartenenti all'insieme  $\mathbb{C}$  tali che  $P(x_i) = 0 \forall i = 1 \dots n$

In pratica ci dice che il grado totale di un polinomio equivale al numero di radici che può avere (la radice è il valore che sostituito alla variabile rende il polinomio uguale a 0) nel campo complesso.

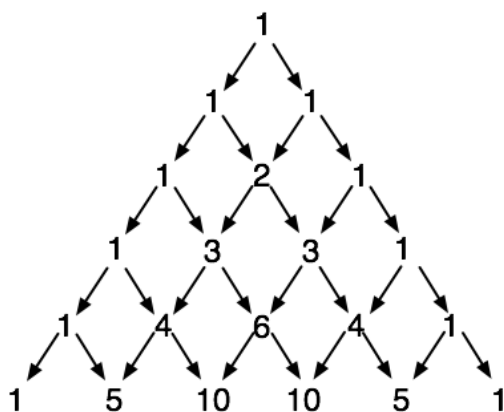
## Prodotti notevoli

Da utilizzare quando si trovano certi tipi di potenze o prodotti nei polinomi. Permettono di svolgere più rapidamente i calcoli e di scomporre in fattori.

| Operazione    | Risultato                    |
|---------------|------------------------------|
| $(A^2 - B^2)$ | $(A + B)(A - B)$             |
| $(A+B)^2$     | $(A+B)(A+B)=(A^2 + 2AB+B^2)$ |
| $(A - B)^2$   | $(A^2 - 2AB+B^2)$            |
| $(A+B)^3$     | $(A^3 + 3A^2B+3AB^2+B^3)$    |
| $(A - B)^3$   | $(A^3 - 3A^2B+3AB^2-B^3)$    |
| $(A+B+C)^2$   | $(A^2+B^2+C^2+2AB+2AC+2BC)$  |

In pratica si scompone e si ricompone in tutti i modi possibili.

Per la potenza del binomio si può ricorrere al **Metodo di Tartaglia**:



$$(A + B)^4 = A^4 + 4A^3B + 6A^2B^2 + 4AB^3 + B^4$$

## Scomposizioni

| il polinomio ha                 | può essere ricondotto a |                                                                         |                                                                                          |
|---------------------------------|-------------------------|-------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------|
| <b>2 termini<br/>(binomio)</b>  | a                       | Differenza di 2 quadrati                                                | $a^2 - b^2 = (a - b) \cdot (a + b)$                                                      |
|                                 | b                       | Differenza di 2 cubi                                                    | $a^3 - b^3 = (a - b) \cdot (a^2 + ab + b^2)$                                             |
|                                 | c                       | Somma di 2 cubi                                                         | $a^3 + b^3 = (a + b) \cdot (a^2 - ab + b^2)$                                             |
| <b>3 termini<br/>(trinomio)</b> | d                       | Quadrato di un binomio                                                  | $a^2 \pm 2ab + b^2 = (a \pm b)^2$                                                        |
|                                 | e                       | Trinomio di 2° grado del tipo:<br>$x^2 + sx + p$ (falso quadrato)       | $x^2 + sx + p = (x + n_1) \cdot (x + n_2)$<br>Dove $s = n_1 + n_2$ ; $p = n_1 \cdot n_2$ |
| <b>4 termini</b>                | f                       | Cubo di un binomio                                                      | $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = (a + b)^3$<br>$a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 = (a - b)^3$       |
|                                 | g                       | Differenza tra 2 quadrati<br>(3 termini sono il quadrato di un binomio) | $a^2 \pm 2ab + b^2 - c^2 = (a \pm b)^2 - c^2$                                            |
|                                 | h                       | Raccoglimento Parziale a 2 a 2                                          | $ax+ay+bx+by = a(x+y) + b(x+y) = (x+y) \cdot (a+b)$                                      |
|                                 | i                       | Quadrato di un trinomio                                                 | $a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc = (a + b + c)^2$                                      |
| <b>6 termini</b>                | m                       | Raccoglimento Parz. a 3 a 3                                             | $ax + ay + ab + 2x + 2y + 2b = a(x + y + b) + 2(x + y + b) = (x + y + b) \cdot (a + 2)$  |

## Teorema di Ruffini

Dato un polinomio  $P(x)$  di grado  $n$ , se  $P(a) = 0$  allora  $\exists Q(x)$  di grado  $n - 1$  tale che  $P(x) = Q(x) \cdot (x - a)$ .

Quando nessuna delle regole viste per la scomposizione di un polinomio si può applicare, si può ricorrere alla regola di Ruffini, procedendo come spiegato nel seguente esempio.

### Esempio

Supponiamo di dover scomporre il polinomio  $2a^3 + a^2 - 25a + 12$

- Si cercano i divisori del termine noto (+12), essi sono:  $\pm 1$ ;  $\pm 2$ ;  $\pm 3$ ;  $\pm 4$ ;  $\pm 6$ ;  $\pm 12$ . Si procede per tentativi **si determina quel divisore che sostituito ad  $a$ , nel polinomio lo rende uguale a 0**;
  - $-1 \rightarrow P(-1) = 2 \cdot (-1)^3 + (-1)^2 - 25 \cdot (-1) + 12 = 36 \neq 0$
  - $1 \rightarrow P(1) = 2 \cdot (1)^3 + (1)^2 - 25 \cdot 1 + 12 = -10 \neq 0$
  - $-2 \rightarrow P(-2) = 2 \cdot (-2)^3 + (-2)^2 - 25 \cdot (-2) + 12 = 50 \neq 0$
  - $2 \rightarrow P(2) = 2 \cdot (2)^3 + (2)^2 - 25 \cdot (2) + 12 = -18 \neq 0$
  - $+3 \rightarrow P(3) = 2 \cdot (3)^3 + (3)^2 - 25 \cdot (3) + 12 = 54 + 9 - 75 + 12 = 0$

$$\begin{array}{r|l}
 2a^3 + a^2 - 25a + 12 & a - 3 \\
 -2a^3 + 6a^2 & \\
 \hline
 / & 7a^2 - 25a + 12 \\
 -7a^2 + 21a & \\
 \hline
 / & -4a + 12 \\
 4a - 12 & \\
 \hline
 / & /
 \end{array}$$

Il numero che si cercava è +3; allora il polinomio  $2a^3 + a^2 - 25a + 12$  è divisibile per  $a - (+3) = a - 3$ .

A questo punto si esegue la divisione tra il polinomio dato ed il binomio  $(a - 3)$ , con il metodo di Ruffini.

E il polinomio risulta così scomposto :  $(2a^3 + a^2 - 25a + 12) = (a - 3)(2a^2 + 7a - 4)$   
 Anche il polinomio  $(2a^2 + 7a - 4)$  si può ulteriormente scomporre applicando ancora la regola di Ruffini , perché si trova il numero  $-4$  , che sostituito alla  $a$  nel polinomio  $(2a^2 + 7a - 4)$  , lo rende uguale a zero.

$$\rightarrow P(-4) = 32 - 28 - 4 = 0$$

$(2a^2 + 7a - 4)$  è divisibile per  $(a + 4)$  , e dalla divisione con il metodo di Ruffini , risulta :  
 $(2a^2 + 7a - 4) = (a + 4)(2a - 1)$

**Alla fine avremo :  $(2a^3 + a^2 - 25a + 12) = (a - 3)(a + 4)(2a - 1)$**

**Nota che se viene del resto, allora è stato scelto il polinomio divisore errato.**

*Esempio*

Si consideri la divisione di una equazione parametrica  $\frac{ax^4 - 3a^2x}{x+a}$

$$\begin{array}{r|l}
 ax^4 + 0x^3 + 0x^2 - 3a^2x + 0 & x+a \\
 -ax^4 - a^2x^3 & \hline
 \hline
 -a^2x^3 + 0x^2 - 3a^2x + 0 & ax^3 - a^2x^2 + a^3x \\
 +a^2x^3 + a^3x^2 & \hline
 \hline
 a^3x^2 - 3a^2x + 0 & (-3a^2 - a^4) \\
 -a^3x^2 - a^4x & \hline
 \hline
 (-3a^2 - a^4)x + 0 & \\
 3a^2 + a^4x + 3a^3 - a^5 & \\
 \hline
 3a^3 + a^5 & 
 \end{array}$$

## Scomposizione di trinomi

Si consideri il trinomio  $ax^2 + bx + c$  , è possibile scomporlo in fattori di primo grado se il  $\Delta$  è maggiore o uguale a 0.

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

Se  $\Delta > 0$ :

$$\begin{aligned}
 ax^2 + bx + c &= a(x - x_1)(x - x_2) \\
 x_{1,2} &= \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}
 \end{aligned}$$

Se  $\Delta = 0$ :

$$\begin{aligned}
 ax^2 + bx + c &= a(x - x_1)^2 \\
 x_1 &= -\frac{b}{2a}
 \end{aligned}$$

*Esempio*

$$x^2 - 2\sqrt{x} - 4$$

$$a = 1, b = -\sqrt{2}, c = -4$$

$$\Delta = 2 + 16 = 18$$

$$x_{1,2} = \frac{\sqrt{2} \pm \sqrt{18}}{2} = \frac{\sqrt{2} \pm 3\sqrt{2}}{2} = \left\{ \frac{4\sqrt{2}}{2}, -\frac{2\sqrt{2}}{2} \right\} = 2\sqrt{2}, -\sqrt{2}$$

$$(x - 2\sqrt{2})(x + \sqrt{2})$$