

Radicali

La radice n-esima con $n \neq 0$ di un numero reale a scritto come $\sqrt[n]{a}$ è un numero reale b tale che $b^n = a$.

$$\sqrt[n]{x} = y \Leftrightarrow y^n = x$$

Non è la funzione inversa della potenza, ma dipende da n , se è pari viene definito un dominio solo positivo, se dispari, $\mathbb{R}$.

Il radicale si scrive anche come elevamento a potenza frazionaria $\sqrt[n]{c} = c^{\frac{1}{n}}$

Terminologia:

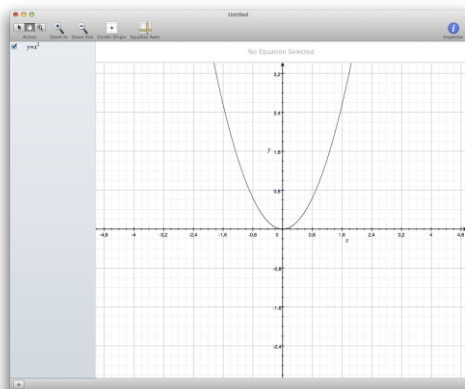
$$\text{coefficiente}^{\text{indice}} \sqrt{\text{radicando}} \leftarrow \text{radicale}$$

Scrivere una radice senza indice di radice equivale ad avere una radice quadrata indice 2.

$$\sqrt{a} = \sqrt[2]{a}$$

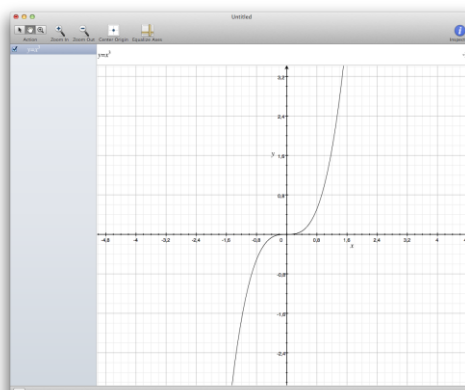
Dimostrazione

Si consideri la rappresentazione grafica della funzione con esponente pari come $y = x^2$:



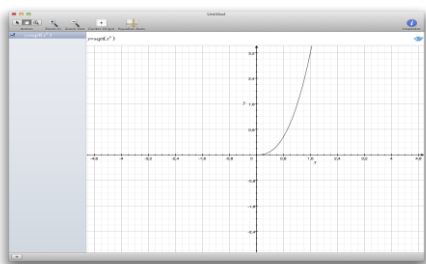
- Suriettiva
- Pari (simmetrica rispetto a y)
- A due elementi del dominio corrisponde un solo elemento del codominio (per esempio a +2 e a -2 corrisponde sempre 4)

Mentre per la funzione con un esponente dispari, per esempio $y = x^3$:



- Biiettiva
- Invertibile
- Dispari (simmetria inversa)

Restringendo il dominio a $\mathbb{R}^+$ la funzione x^n diventa iniettiva, quindi invertibile.



- Iniettiva, quindi invertibile

Quindi, nella funzione $y = x^n$:

- Se n è dispari la potenza $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} f(x) = x^n$ è invertibile, e la funzione inversa si chiama **radice** n -esima $f^{-1}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} f^{-1}(x) = \sqrt[n]{x}$
- Se n è pari la potenza $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+ f(x) = x^n$ è invertibile, e la funzione inversa si chiama **radice** n -esima $f^{-1}: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+ f^{-1}(x) = \sqrt[n]{x}$

Sia $a \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$ non nullo:

- Se $a \geq 0$ si dice radice n -esima di quell'unico numero reale non negativo per la cui potenza n -esima è uguale ad a , quindi tale che $x^n = a$
- Se $a \leq 0$ e n è pari, la radice non ha alcun significato
- Se $a < 0$ e n è dispari, si dice radice n -esima di a quell'unico numero reale negativo tale che $x^n = a$

Radicali algebrici e aritmetici

Quando non ci interessa sapere il segno, si parla di radicali aritmetici, quindi per esempio $\sqrt{25} = 5$. I radicali algebrici sono la operazione inversa dell'elevamento a potenza, quindi se si vuole trovare il numero che elevato al quadrato dà 25, si ottiene 5, ma anche -5.

Radicale aritmetico: $\sqrt{b} = |a|$

Radicale algebrico: $\sqrt{b} = \pm a$

Con i radicali algebrici (quindi considerando anche $\mathbb{R}^-$) si hanno tutte le possibilità, e sono quelli che vanno usati nei calcoli quando si studiano i segni. I radicali aritmetici vengono semplicemente considerati senza segno.

Da notare che per una radice con esponente dispari, il segno non viene cambiato. Si mette $\pm$ solo nei radicali con l'esponente pari, dato che il risultato al quadrato dà un numero sempre positivo.

Proprietà

Somma e differenza

Quando il radicando e l'indice sono uguali, si lavora solo con i coefficienti (raccoglimento)

$$\Rightarrow a\sqrt{x} + b\sqrt{x} = (a + b)\sqrt{x}$$

Potenza

$$(a^n \sqrt[n]{x})^k = a^k \sqrt[n]{x^k} = a^k x^{\frac{k}{n}}$$

Moltiplicazione e divisione

Se l'indice è uguale, si includono i radicandi nella stessa radice, se l'indice è diverso, bisogna calcolare prima l'indice comune minimo (m.c.i.)

$$\sqrt[n]{x} \cdot \sqrt[n]{y} = \sqrt[n]{x \cdot y}$$

$$\Rightarrow \sqrt[n]{\frac{x}{y}} = \frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}}$$

Moltiplicazione indice e radicando

$$\sqrt[n]{x^m} = \sqrt[n \cdot p]{x^{m \cdot p}} \text{ (multipli)}$$

Esempio

$$\sqrt[15]{a^9} = \sqrt[5]{a^3}$$

Trasporto fuori e dentro dalla radice

$$a^q \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{a^{q \cdot n} x}$$

Esempio

$$\sqrt{12} = \sqrt{4 \cdot 3} = \sqrt{2^2 \cdot 3} = 2\sqrt{3}$$

Attenzione a non trasportare il segno del coefficiente dentro la radice

Esempio

$$-2\sqrt{2} = -\sqrt{2^2} \cdot \sqrt{2} = -\sqrt{8}$$

Radicali doppi

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m \cdot n]{a}$$

Esempio

$$\sqrt{3 + 2\sqrt{2}} = \sqrt{2 + 1 + 2\sqrt{2}} \leftarrow 2 = \sqrt{2^2}$$

$$\sqrt{(\sqrt{2} + 1)^2} \leftarrow \text{doppio prodotto}$$

$$\sqrt{2} + 1$$

Razionalizzazioni

$$x\sqrt{2} - x\sqrt{3} = \sqrt{2} - \sqrt{3}$$

$$(\sqrt{2} - \sqrt{3})x = \sqrt{2} - \sqrt{3}$$

$$x = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{3}}{\sqrt{2} - \sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{2} + \sqrt{3}}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} \leftarrow \text{razionalizzazione}$$

$$x = \frac{(\sqrt{2} + \sqrt{3})^2}{2 - 3} = -5 - 2\sqrt{6}$$