

Sistemi lineari

Consistono in due o più equazioni che fanno soddisfatte contemporaneamente. Si considerano le soluzioni delle equazioni come due o più insiemi che si intersecano.

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$

La parentesi graffa indica il legame tra le due equazioni. Il risultato si può vedere come l'intersezione delle equazioni:

$$S = S_1 \cap S_2 \cap \dots S_n$$

Quando si risolve un sistema, si cerca una o più soluzioni comuni alle equazioni che lo compongono, ovvero:

$$\bar{x} \in A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n \text{ dove } A_n = \{x | f_n(x) = 0\}$$

Grado del sistema

Il grado del sistema è dato dal prodotto dei gradi delle singole equazioni che lo compongono.

Esempio

$$\begin{cases} x^2 + y^3 = 2 \\ xy = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 3^{\circ} \text{ grado} \\ 2^{\circ} \text{ grado} \end{cases} \rightarrow 3 \cdot 2 = 6$$

Sistemi simmetrici

Dove se si sostituiscono x e y il sistema non cambia.

Esempio

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 2 \\ xy = 1 \end{cases}$$

Sistemi omogenei

Quando le equazioni (con l'eccezione dei termini noti) hanno tutti i termini con lo stesso grado.

Tipi di sistemi

Determinato

Ha un numero finito di soluzioni (geometricamente delle intersezioni tra due linee)

$$\frac{a}{a'} \neq \frac{b}{b'}$$

Indeterminato

Ha un numero infinito di soluzioni (geometricamente ci sono punti infiniti in comune)

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$$

Impossibile

Non ha soluzioni (geometricamente due linee che non intersecano)

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \neq \frac{c}{c'}$$

Sistemi di Primo Grado

I sistemi di primo grado si possono rappresentare nel piano cartesiano da rette, che se intersecano rappresentano la soluzione del sistema in un punto, se sono coincidenti le soluzioni sono infinite, mentre se sono parallele non esiste soluzione in $\mathbb{R}$.

2 equazioni, 2 incognite (o anche di più)

Ridurre il sistema in forma normale ($x = ay + c$)

Metodo di sostituzione

Si ricava una variabile da una delle equazioni, poi si sostituisce il valore al posto della variabile dell'altra equazione, in modo da ridurla con una sola incognita. Normalmente si sostituisce in modo da rendere le operazioni il più semplice possibile. Una volta arrivati ad avere una equazione ad una sola incognita, la si risolve.

Esempio

$$\begin{aligned} &\begin{cases} 2x + 3y = 12 \\ -y = 7 - 3x \end{cases} \\ &\begin{cases} 2x + 3y = 12 \\ y = -7 + 3x \end{cases} \\ &\begin{cases} 2x + 3(-7 + 3x) = 12 \\ y = -7 + 3x \end{cases} \\ &\begin{cases} 11x = 33 \\ y = -7 + 3x \end{cases} \\ &\begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \end{cases} \end{aligned}$$

Metodo di riduzione (o addizione e sottrazione)

Si cerca di rendere uguale e di segno contrario nelle equazioni il termine che contiene y o x.

Una volta ottenute due equazioni dove uno dei termini si annullerebbe se venissero sommate, si ottiene la incognita.

Lo scopo è far sparire una incognita sommando le due equazioni (primo termine con il primo, secondo con il secondo)

Dimostrazione

Si considerano due equazioni di rette, r ed s , e scriviamo la combinazione lineare:

$\bar{t} = \lambda r + (1 - \lambda)s$ (somma di equazioni lineari moltiplicate per coefficienti)

Considero il sistema formato da r e $\bar{t}$:

$$\begin{cases} r \\ \bar{t} \end{cases} \text{ oppure } \begin{cases} s \\ \bar{t} \end{cases} \text{ in luogo del sistema equivalente di partenza } \begin{cases} r \\ s \end{cases}$$

Geometricamente significa che:

1. Prendo la retta di partenza
2. Considero il fascio generato da $\lambda r + \mu s$ al variare di $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$

3. Fisso un valore $\bar{\lambda}, \bar{\mu}$ opportuno e considero $\bar{t} \mid \bar{\lambda}r + \bar{\mu}s = 0$
4. Considero il sistema $\begin{cases} r \\ \bar{t} \end{cases}$ oppure $\begin{cases} s \\ \bar{t} \end{cases}$ che ha le stesse soluzioni di quello in partenza

Esempio

$$\begin{cases} 2x + 3y = 12 \\ 3x - y = 7 \end{cases} \quad \begin{cases} 2x + 3y = 12 \\ 3x - y = 7 \leftarrow \times 3 \end{cases}$$

Tra le due equazioni, se sommate, si annulla y.

$$\begin{cases} 2x + 3y = 12 \\ 9x - 3y = 21 \end{cases}$$

$$11x = 33$$

$$x = 3$$

Esempio

Si ha il sistema di equazioni parametriche:

$$\begin{cases} ax + y = 1 \\ 2x + ay = 2 \end{cases}$$

Si applica il metodo di riduzione (moltiplicando per $-a$, e specificando che $a \neq 0$):

$$\begin{cases} -ax^2 - ay = -a \\ 2x + ay = 2 \end{cases} \rightarrow (-a^2 + 2)x = -a + 2$$

$$x = \frac{-a + 2}{-a^2 + 2}, -a^2 + 2 \neq 0 \rightarrow a^2 \neq 2 \rightarrow a \neq \sqrt{2} \wedge a \neq -\sqrt{2} \wedge a \neq 0$$

$$y = 1 - a \left(\frac{-a + 2}{-a^2 + 2} \right)$$

Adesso bisogna vedere anche cosa accade per $a = \pm\sqrt{2}$ e $a = 0$:

$$a = 0 \Rightarrow \begin{cases} y = 1 \\ x = 1 \end{cases}$$

$$a = \pm\sqrt{2} \Rightarrow \text{impossibile} (0 = 2 \pm \sqrt{2})$$

Altri metodi

Metodo di confronto

Si ricavano le x in entrambi i termini (o le y), si uguagliano i risultati (si crea una sola equazione dove le x spariscono perchè la prima equazione è uguale alla seconda), si ottiene y.

Cramer

Si consideri il sistema:

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$

$$D = \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = ab' - a'b$$

$$D_x = \begin{vmatrix} c & b \\ c' & b' \end{vmatrix} = cb' - c'b$$

$$D_y = \begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix} = ac' - a'c$$

Se $D \neq 0$ il sistema è determinato, quindi $x = \frac{D_x}{D}, y = \frac{D_y}{D}$, se invece $D = 0$, il sistema è indeterminato (x e $y = 0$), o impossibile.

3 incognite

Geometricamente equivale alla intersezione di 3 piani. Per risolverle bisogna fare in modo che due su tre contengano due incognite, poi si risolvono.

Esistono cinque diversi casi:

1. Rette tra di loro distinte $S = \emptyset$
2. Due rette coincidono e sono tutte parallele $S = \emptyset$
3. Due rette coincidono e incidono la terza $S = \{(x, y)\}$
4. Non sono parallele, ma passano tutte attraverso uno stesso punto $S = \{(x, y)\}$
5. Tutte le rette coincidono $S = \infty$

Sistemi di grado superiore al primo

Per un sistema di secondo grado (prima equazione di secondo grado e seconda di primo grado), si procede con il metodo di sostituzione.

Anche con sistemi a più incognite si procede a sostituire le incognite fino ad avere una equazione ad incognita singola, e si procede a semplificare le altre.

In casi dove una equazione di secondo grado prende la forma $xy = a$, quindi $x = \frac{a}{y}$, bisogna porre la condizione che $y \neq 0$.

A volte per risolvere una equazione con incognita al denominatore basta fare l'm.c.m. e poi eliminare il denominatore, dato che è uguale da entrambe le parti.