

6 Geometria elementare, piana e solida

6.1 Introduzione

6.1.1 Figure geometriche

Le *figure geometriche* sono insiemi di punti.

Tra queste vi sono le *linee* (*aperte* o *chiuse*, *limitate* o *illimitate*), le *superfici* (*aperte* o *chiuse*, *limitate* o *illimitate*) ed i *solidi* (*limitati* o *illimitati*), che assumiamo come concetti primitivi: un filo sottile, la traccia lasciata da una matita, un velo senza spessore, una bolla di sapone, un dado, una palla, ... possono darne un'idea intuitiva. Le rette sono particolari linee ed i piani sono particolari superfici, entrambe aperte ed illimitate.

Definizione. Due figure si dicono **coincidenti** quando ogni punto dell'una è anche punto dell'altra e viceversa.

Definizione. Due figure si dicono **congruenti** quando si può portare, senza deformazione, una di esse a coincidere con l'altra.

Definizione. Si dice **intersezione** di due o più figure l'insieme dei punti ad esse comuni.

Ricordiamo che una figura geometrica è detta *piana* quando tutti i suoi punti stanno su uno stesso piano.

6.1.2 Estensione e misura

Linee, superfici e solidi sono dotati di una proprietà intrinseca che chiamiamo **estensione**: ciascuna di esse *occupa una porzione più o meno estesa di spazio*; è noto ed intuitivo il fatto di poter dare una **misura** di tale estensione, ovvero di poterla *quantificare (in modo convenzionale) mediante un numero*.

Pur condividendo la proprietà di estensione, linee, superfici e solidi la posseggono però in maniera qualitativamente differente: è evidente che non si riesce a paragonare l'estensione, ad esempio, di una linea con quella di un solido; la misura di estensione va fatta allora in modo diverso a seconda della figura da misurare ed al numero che quantifica l'estensione di linee, superfici o solidi si dà, rispettivamente, il nome di *lunghezza*, *area* o *volume*.

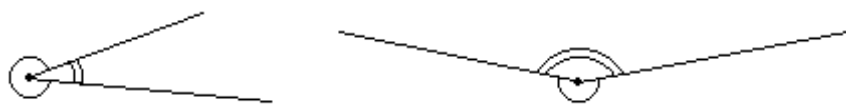
Per semplicità, nel seguito confonderemo spesso, con abuso di linguaggio, una figura con la sua misura: ad esempio dicendo "somma di segmenti" intenderemo la somma delle loro lunghezze; sarà comunque chiaro dal contesto a cosa ci si stia riferendo.

È un fatto generale che *figure congruenti possiedono la stessa estensione (ovvero la stessa misura di tale estensione)*; il viceversa è invece vero solo in certi casi (due segmenti che abbiano la stessa lunghezza sono congruenti, due quadrati di uguale area sono congruenti, ...), ma non in generale (è facile immaginare, ad esempio, due rettangoli non congruenti ma con uguale area).

6.2 Figure geometriche piane

6.2.1 Angoli

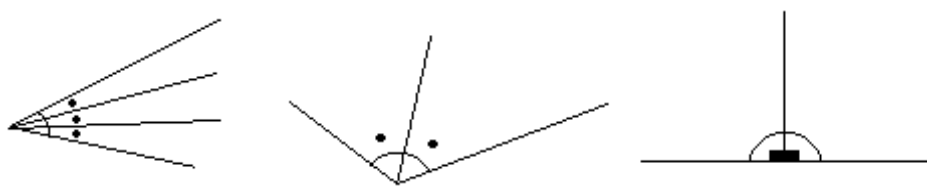
Definizione. Due semirette aventi la stessa origine dividono il loro piano in due figure, ciascuna delle quali è detta **angolo**; tali semirette si dicono **lati** dell'angolo e la loro origine si dice **vertice** dell'angolo.



Un angolo si dice *piatto* quando i suoi lati sono semirette opposte; gli angoli formati da due semirette coincidenti si dicono invece angolo *nullo* e angolo *giro*.



Un qualunque angolo può essere diviso, mediante semirette con origine nel suo vertice, in un qualsiasi numero di angoli tra loro congruenti; in particolare, si dice *bisettrice* di un angolo la semiretta che lo divide in due angoli congruenti e si chiama angolo *retto* ciascuno dei due angoli in cui un angolo piatto resta diviso dalla sua bisettrice.



Proprietà. Tutti gli angoli retti (o piatti o nulli o giri) sono tra loro congruenti.

È nota ed intuitiva la possibilità di misurare l'**ampiezza** di un angolo¹; se si sceglie ad esempio il *grado* (che è, per definizione, la *novantesima parte dell'angolo retto*) come unità di misura, si ha

angolo	misura in gradi ("°" oppure "deg")
nullo	0°
retto	90°
piatto	180°
giro	360°

inoltre *due angoli sono congruenti se e solo se hanno la stessa ampiezza (ovvero la stessa misura).*

Un angolo si dice

¹Per semplicità, nel seguito confonderemo spesso, con abuso di linguaggio, un angolo con la misura della sua ampiezza.

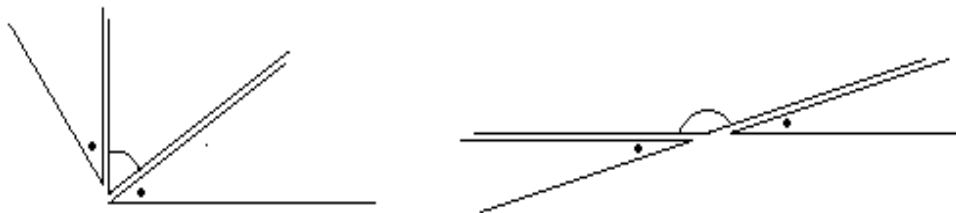
- *convesso* quando è minore di un angolo piatto
- *concavo* quando è maggiore di un angolo piatto
- *acuto* quando è minore di un angolo retto
- *ottuso* quando è maggiore di un angolo retto.

Due angoli si dicono

- *supplementari* quando la loro somma è un angolo piatto
- *complementari* quando la loro somma è un angolo retto.

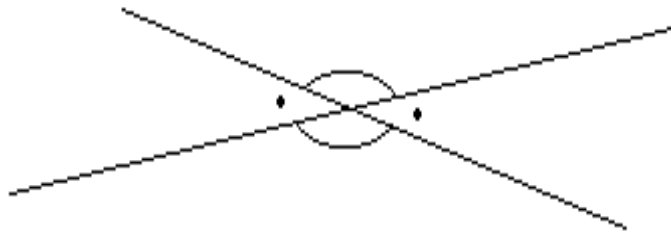


Proprietà. Due angoli complementari (o supplementari) di uno stesso angolo o di angoli congruenti sono congruenti.

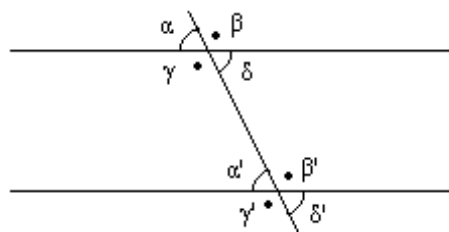


Due angoli si dicono *opposti al vertice* quando i lati dell'uno sono i prolungamenti dei lati dell'altro.

Proprietà. Due angoli opposti al vertice sono congruenti.



Due rette parallele intersecate da una trasversale formano otto angoli



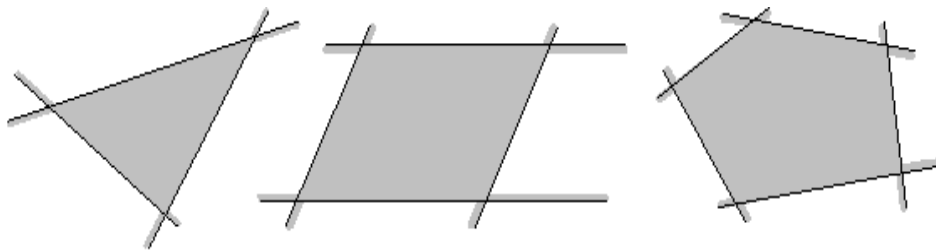
per i quali si dice che

- α e α' , β e β' , γ e γ' , δ e δ' sono corrispondenti
- δ e β' , γ e α' sono alterni interni
- α e γ' , β e δ' sono alterni esterni
- δ e α' , γ e β' sono coniugati interni
- α e δ' , β e γ' sono coniugati esterni.

Teorema. Due rette parallele tagliate da una trasversale formano angoli alterni congruenti, angoli corrispondenti congruenti e angoli coniugati supplementari.

6.2.2 Poligoni convessi

Definizione. Una figura piana è detta **poligono** (sottintenderemo **convesso**) quando è intersezione di semipiani²; tra i punti di intersezione delle rette che delimitano tali semipiani, quelli che appartengono al poligono si dicono **vertici** del poligono ed i segmenti di tali rette che congiungono due vertici si dicono **lati** del poligono.

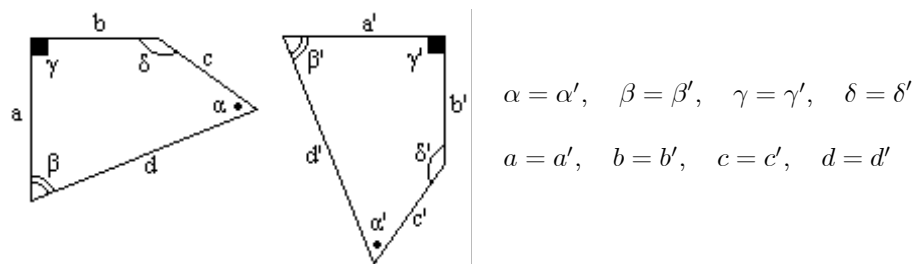


Si chiama *perimetro* di un poligono la somma delle lunghezze dei suoi lati.

In un poligono, si dicono *lati consecutivi* due lati che hanno un vertice in comune e *vertici consecutivi* due estremi di uno stesso lato; gli angoli convessi individuati dalle semirette di due lati consecutivi si dicono *angoli del poligono* (e, tra questi, si dicono *adiacenti* ad un certo lato quelli che hanno il vertice su tale lato) ed i segmenti che congiungono due vertici non consecutivi si dicono *diagonali* del poligono. Ogni poligono ha lo stesso numero di vertici, lati ed angoli.

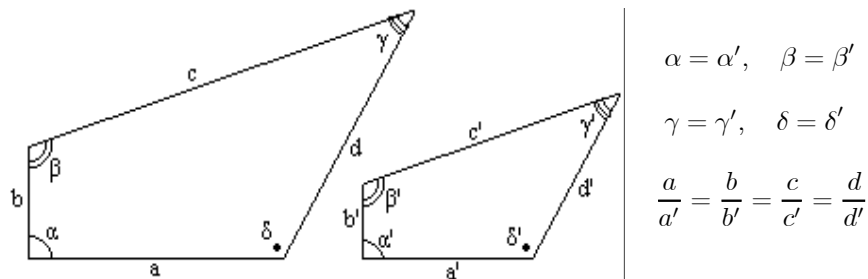
Teorema. Un poligono con n lati ha $\frac{n(n-3)}{2}$ diagonali e la somma dei suoi angoli misura $180(n-2)$ deg.

Teorema (criterio di congruenza). Due poligoni sono congruenti se e solo se hanno angoli e lati (ordinatamente) congruenti.



² si dice **semipiano** ciascuna delle due figure in cui un piano resta diviso da una sua retta

Definizione. Diciamo che due poligoni sono **simili** quando hanno (ordinatamente) angoli congruenti e lati proporzionali.

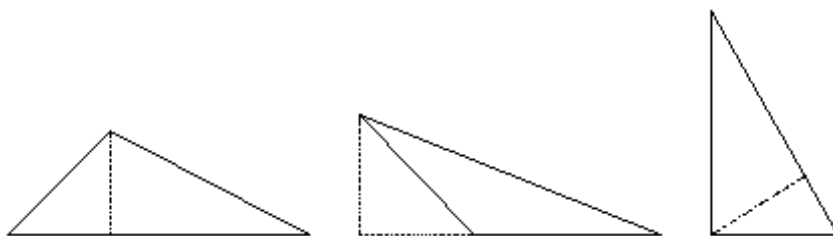


Definizione. Un poligono si dice **regolare** quando ha lati ed angoli tutti congruenti tra loro.

Proprietà. Tutti i poligoni regolari con lo stesso numero di lati sono simili. Due poligoni regolari con lo stesso numero di lati sono congruenti se e solo se hanno la stessa area.

6.2.3 Triangoli

I tre lati ed i tre angoli di un triangolo si dicono *elementi* del triangolo (e “risolvere un triangolo” significa determinarne tutti gli elementi). Un lato ed un angolo si dicono *opposti* quando il vertice dell’angolo non appartiene al lato. Si chiama *altezza relativa ad un lato* il segmento perpendicolare alla retta su cui giace tale lato, condotto dal vertice opposto; ogni triangolo ha dunque tre altezze.



Teorema. La somma degli angoli interni di un triangolo misura 180° .

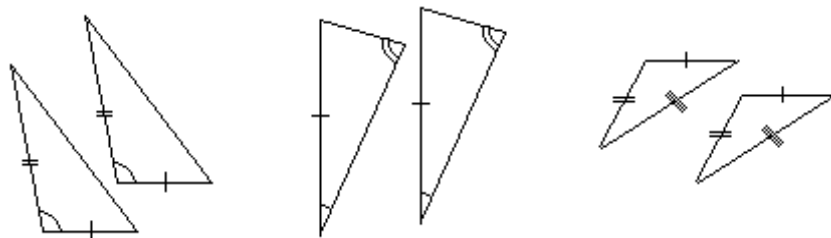
Teorema. Condizione necessaria e sufficiente affinché tre segmenti siano i lati di un triangolo è che ognuno sia minore della somma degli altri due e maggiore della loro differenza.

Teorema (I criterio di congruenza). Due triangoli sono congruenti se e solo se hanno congruenti due lati e l’angolo tra essi compreso.

Teorema (II criterio di congruenza). Due triangoli sono congruenti se e solo se hanno congruenti un lato e due angoli.

Teorema (III criterio di congruenza). Due triangoli sono congruenti se e

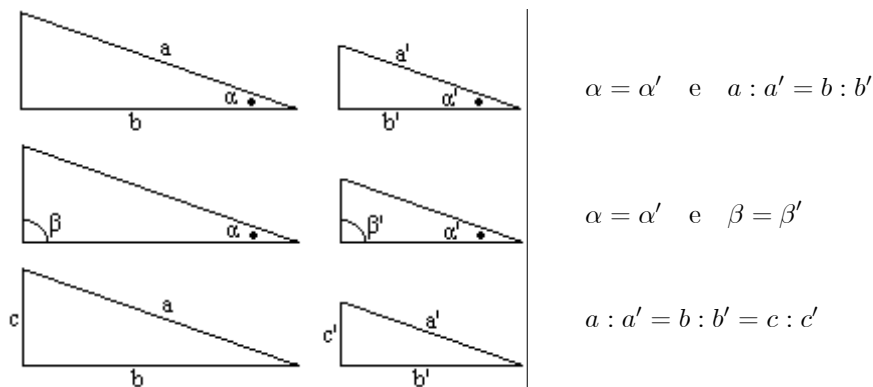
solo se hanno congruenti tutti i lati.



Teorema (I criterio di similitudine). Due triangoli sono simili se e solo se hanno due lati proporzionali e l'angolo tra essi compreso congruente.

Teorema (II criterio di similitudine). Due triangoli sono simili se e solo se hanno congruenti due angoli.

Teorema (III criterio di similitudine). Due triangoli sono simili se e solo se hanno proporzionali tutti i lati.

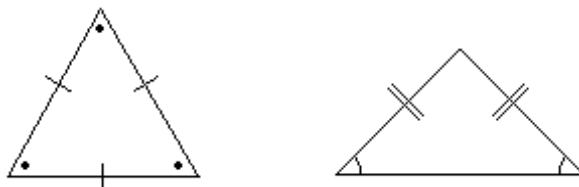


Un triangolo si dice

- *equilatero* quando ha i lati tutti congruenti (cioè è regolare)
- *isoscele* quando ha due lati congruenti (che si dicono allora semplicemente *lati*, mentre il rimanente lato si dice *base*; l'angolo opposto alla base si dice *angolo al vertice* e gli altri due si dicono *angoli alla base*)
- *scaleno* altrimenti.

Proprietà. Un triangolo è

- *equilatero* se e solo se tutti i suoi angoli sono congruenti
- *isoscele* se e solo se due dei suoi angoli sono congruenti.



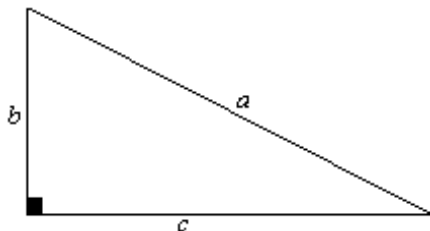
Teorema. *In un triangolo equilatero di lato l ed altezza h (le altezze di un triangolo equilatero sono tutte congruenti), si ha*

$$h = l \frac{\sqrt{3}}{2} .$$

Un triangolo si dice

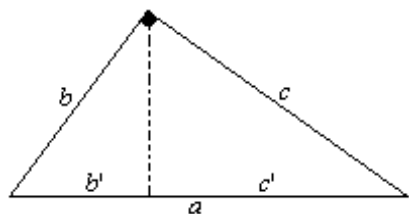
- *rettangolo* quando ha un angolo retto (il lato opposto all'angolo retto si dice allora *ipotenusa* e gli altri due si dicono *cateti*)
- *ottusangolo* quando ha un angolo ottuso
- *acutangolo* quando ha tutti gli angoli acuti.

Teorema (di Pitagora). *In un triangolo rettangolo, il quadrato dell'ipotenusa è uguale alla somma dei quadrati dei cateti:*



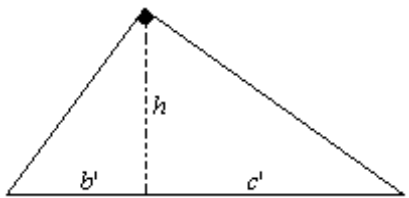
$$a^2 = b^2 + c^2$$

Teorema (I teorema di Euclide). *In un triangolo rettangolo, il quadrato di un cateto è uguale al prodotto dell'ipotenusa per la proiezione di quel cateto sull'ipotenusa:*



$$\begin{aligned} b^2 &= ab' \\ c^2 &= ac' \end{aligned}$$

Teorema (II teorema di Euclide). *In un triangolo rettangolo, il quadrato dell'altezza relativa all'ipotenusa è uguale al prodotto delle proiezioni dei cateti sull'ipotenusa:*



$$h^2 = b'c'$$

Area

b : un lato qualunque, scelto come *base*

h : altezza relativa a b

$\mathcal{A}$: area

$$\boxed{\mathcal{A} = \frac{bh}{2}}$$



Brevemente:

$$\text{Area} = \frac{\text{base} \times \text{altezza}}{2} .$$

In un triangolo rettangolo, è evidente che i due cateti, essendo perpendicolari tra loro, sono uno l'altezza relativa all'altro; dunque, per un *triangolo rettangolo*, si può anche dire

$$\text{Area} = \frac{\text{cateto} \times \text{cateto}}{2} .$$

L'area di un triangolo qualunque può anche essere espressa in termini di tutti i suoi lati, tramite la **formula di Erone**:

a, b, c : lati del triangolo

p : perimetro (cioè $p = a + b + c$)

$$\boxed{\mathcal{A} = \sqrt{\frac{p}{2} \left(\frac{p}{2} - a\right) \left(\frac{p}{2} - b\right) \left(\frac{p}{2} - c\right)}}$$

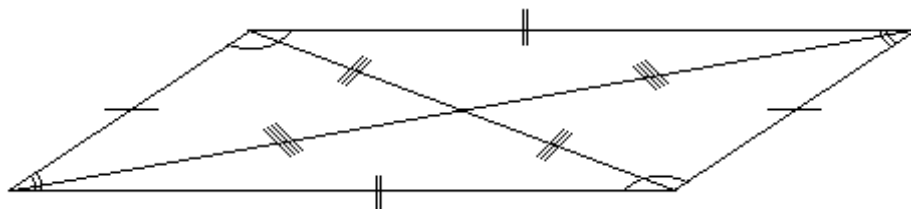
6.2.4 Parallelogrammi

In un quadrilatero (cioè un poligono con 4 lati), sia due lati non consecutivi sia due vertici non consecutivi sia due angoli non adiacenti al medesimo lato si dicono *opposti*.

Definizione. Per **parallelogramma** si intende un quadrilatero che abbia i lati opposti paralleli.

Proprietà. Condizioni necessarie e sufficienti affinché un quadrilatero (convesso) sia un parallelogramma sono che:

- 1) le diagonali si intersechino in un punto che le dimezza entrambe
- 2) gli angoli opposti siano congruenti
- 3) i lati opposti siano congruenti.



È utile però notare che, per poter affermare che un quadrilatero è un parallelogramma, è sufficiente verificare che abbia *due lati opposti congruenti e paralleli*.

In un parallelogramma, si chiama *altezza relativa ad un lato* il segmento perpendicolare alla retta su cui giace tale lato, condotto dal lato opposto; è evidente che le altezze relative a due lati opposti sono congruenti e dunque ogni parallelogramma ha due altezze.

Area

b : un lato qualunque, scelto come *base*

h : altezza relativa a b

$\mathcal{A}$: area

$$\boxed{\mathcal{A} = bh}$$



Brevemente:

$$\text{Area} = \text{base} \times \text{altezza} .$$

Rettangolo

Si dice *rettangolo* un parallelogramma che abbia quattro angoli retti.

Proprietà. *Un parallelogramma è un rettangolo se e solo se le sue due diagonali sono congruenti.*

È utile però notare che, per poter affermare che un parallelogramma è un rettangolo, è sufficiente verificare che abbia *un angolo retto*.

Area

Le lunghezze di due lati consecutivi di un rettangolo si dicono *dimensioni* del rettangolo; per un rettangolo, poichè è evidente che i due lati (essendo perpendicolari tra loro) sono uno l'altezza relativa all'altro, si può allora anche dire

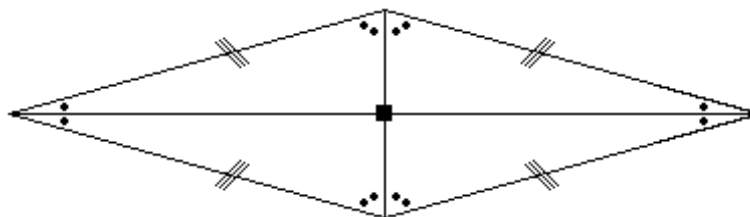
$$\text{Area} = \text{prodotto delle 2 dimensioni} .$$

Rombo

Si dice *rombo* un parallelogramma che abbia i lati tutti congruenti.

Proprietà. *Condizioni necessarie e sufficienti affinché un parallelogramma sia un rombo sono che:*

- 1) *le diagonali siano perpendicolari*
- 2) *i quattro angoli siano bisecati dalle due diagonali.*



È utile però notare che, per poter affermare che un parallelogramma è un rombo, è sufficiente verificare che abbia *un angolo bisecato dalla diagonale che passa per il suo vertice*.

Area

Oltre alla formula

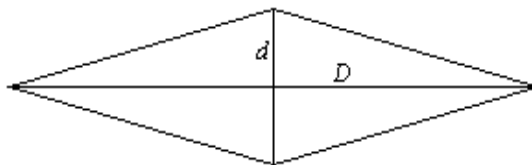
$$\text{Area} = \text{base} \times \text{altezza} .$$

valida per ogni parallelogramma, l'area di un rombo può anche essere espressa in termini delle sue diagonali:

d, D : diagonali del rombo

$\mathcal{A}$: area

$$\boxed{\mathcal{A} = \frac{dD}{2}}$$



A meno che un rombo non sia in particolare un quadrato, le sue diagonali sono disuguali e sono allora dette *diagonale maggiore* e *diagonale minore*; dunque, brevemente:

$$\text{Area} = \frac{\text{diagonale maggiore} \times \text{diagonale minore}}{2} .$$

Quadrato

Si dice *quadrato* un parallelogramma che sia contemporaneamente rombo e rettangolo.

Un quadrato è un poligono regolare e gode ovviamente di tutte le proprietà sia dei rombi che dei rettangoli; ad esempio, notiamo in particolare che

- le diagonali di un quadrato sono congruenti, perpendicolari tra loro e bisettrici dei suoi angoli

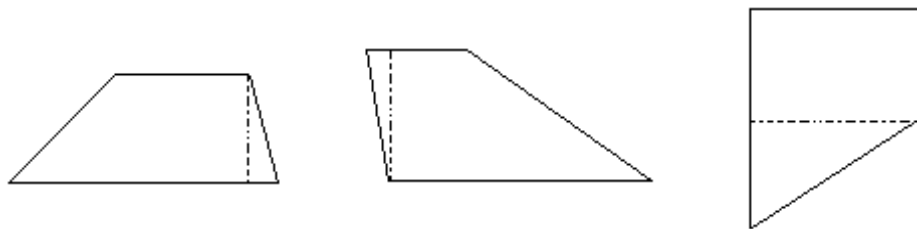
- $\text{Area} = (\text{lato})^2 = \frac{(\text{diagonale})^2}{2}$.

Teorema. In un quadrato di lato l e diagonale d , si ha

$$d = l\sqrt{2} .$$

6.2.5 Trapezi

Definizione. Per **trapezio** si intende un quadrilatero che abbia due lati opposti paralleli; tali lati si dicono **basi** del trapezio, mentre gli altri si dicono **lati obliqui** o semplicemente **lati**; si chiama **altezza** del trapezio il segmento perpendicolare alle due basi.



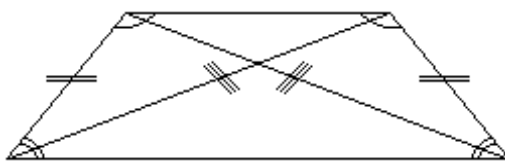
Un trapezio si dice

- *rettangolo* quando ha un lato perpendicolare alle basi (tale lato coincide allora ovviamente con l'altezza del trapezio)

- *isoscele* quando ha i lati obliqui congruenti.

Proprietà. Condizioni necessarie e sufficienti affinché un trapezio sia isoscele sono che:

- 1) gli angoli adiacenti ad una qualunque delle due basi siano tra loro congruenti
- 2) le due diagonali siano tra loro congruenti.



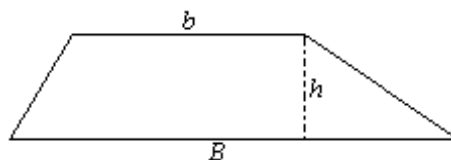
Area

b, B : basi del trapezio

h : altezza del trapezio

$\mathcal{A}$: area

$$\mathcal{A} = \frac{(B+b)h}{2}$$



Abbiamo già visto che un quadrilatero che abbia due lati opposti paralleli e congruenti è un parallelogramma e quindi, a meno che un trapezio non sia in particolare un parallelogramma, le sue basi sono disuguali e sono allora dette *base maggiore* e *base minore*; dunque, brevemente:

$$\text{Area} = \frac{(\text{base maggiore} + \text{base minore}) \times \text{altezza}}{2}.$$

6.2.6 Circonferenza e cerchio

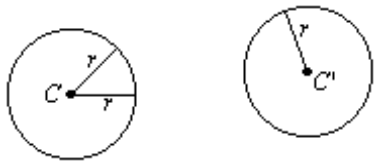
Per *distanza di due punti* si intende la lunghezza del segmento che li unisce.

Definizione. Si dice **circonferenza di centro C e raggio r** il luogo³ dei punti di un piano (che passi per C) che hanno distanza uguale ad r dal punto C . Si dice **cerchio di centro C e raggio r** il luogo dei punti di un piano (che passi per C) che hanno distanza minore o uguale ad r dal punto C .

Per la solita identificazione tra segmenti e lunghezze, con il termine *raggio* si indica anche un qualunque segmento che unisca un punto della circonferenza al suo centro, mentre si dice *diametro* sia un qualunque segmento che unisca due punti della circonferenza passando per il suo centro sia la lunghezza di un tale segmento (che è evidentemente uguale a $2r$); tutti i raggi ed i diametri di una circonferenza sono tra loro congruenti.

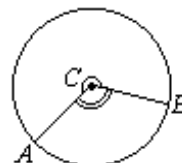
³In geometria, con il termine *luogo* si intende l'insieme di tutti e soli i punti che godono di una certa proprietà caratteristica.

Proprietà. Due circonferenze (o due cerchi) sono congruenti se e solo se hanno uguale raggio.

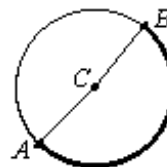


Definizioni. Dati due punti A e B su una circonferenza di centro C e considerati i raggi $\overline{CA}$ e $\overline{CB}$,

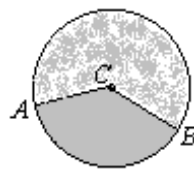
- 1) risultano individuati (nel piano della circonferenza) due angoli $\widehat{ACB}$, detti **angoli al centro**⁴



- 2) la circonferenza risulta divisa in due tratti $\widehat{AB}$, detti **archi di circonferenza**; diciamo che ciascuno di tali archi **corrisponde** all'angolo al centro in cui è incluso⁵



- 3) il cerchio risulta diviso in due parti $\widehat{ACB}$, dette **settori circolari**; diciamo che ciascuno di tali settori **corrisponde** all'angolo al centro in cui è incluso⁶



Una retta ed una circonferenza di uno stesso piano possono

- non avere punti in comune
- avere un solo punto in comune (e si dice allora che la retta è *tangente* alla circonferenza)
- avere due punti in comune (e si dice allora che la retta è *secante* alla circonferenza).

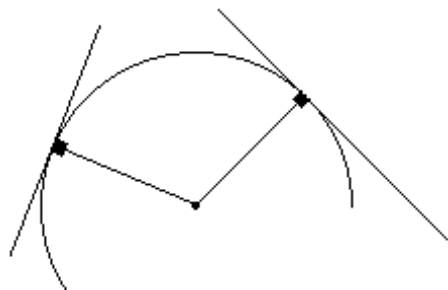
Teorema. La tangente ad una circonferenza ed il raggio che ne unisce il centro

⁴ se A e B sono estremi di uno stesso diametro, tali angoli saranno **piatti**; diversamente, saranno uno **concavo** e l'altro **convesso**

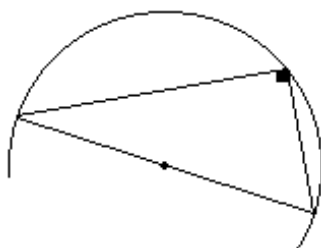
⁵ se A e B sono estremi di uno stesso diametro, ciascun arco $\widehat{AB}$ si dice **semicirconferenza**; diversamente, dei due archi $\widehat{AB}$ si dice **concavo** quello corrispondente all'angolo al centro concavo e **convesso** quello corrispondente all'angolo al centro convesso

⁶ se A e B sono estremi di uno stesso diametro, ciascun settore $\widehat{ACB}$ si dice **semicerchio**; diversamente, dei due settori $\widehat{ACB}$ si dice **concavo** quello corrispondente all'angolo al centro concavo e **convesso** quello corrispondente all'angolo al centro convesso

al punto di contatto sono perpendicolari.



Teorema. Un triangolo che abbia un lato coincidente con un diametro di una circonferenza ed il vertice opposto su tale circonferenza è rettangolo.



Lunghezza e area

r : raggio (della circonferenza e del cerchio)

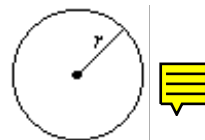
ℓ : lunghezza della circonferenza

$\mathcal{A}$: area del cerchio

$$\boxed{\ell = 2\pi r}$$

$$\boxed{\mathcal{A} = \pi r^2}$$

($\pi = 3,14159265\dots$)



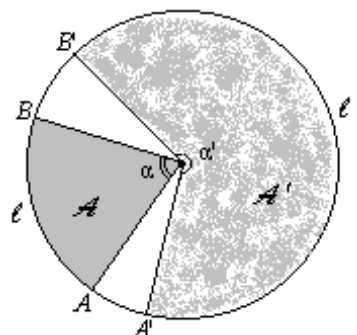
Teorema. In una stessa circonferenza, gli archi di circonferenza ed i settori circolari sono proporzionali ai corrispondenti angoli al centro; in altri termini, dati due qualunque angoli al centro $\widehat{ACB}$ e $\widehat{A'CB'}$ di una circonferenza di centro C e denotate con

- α ed α' le ampiezze degli angoli $\widehat{ACB}$ e $\widehat{A'CB'}$
- $\ell_{\widehat{AB}}$ ed $\ell_{\widehat{A'B'}}$ le lunghezze degli archi $\widehat{AB}$ e $\widehat{A'B'}$
- $\mathcal{A}_{\widehat{ACB}}$ ed $\mathcal{A}_{\widehat{A'CB'}}$ le aree dei settori $\widehat{ACB}$ e $\widehat{A'CB'}$

si ha

$$\boxed{\ell_{\widehat{AB}} : \ell_{\widehat{A'B'}} = \alpha : \alpha'}$$

$$\boxed{\mathcal{A}_{\widehat{ACB}} : \mathcal{A}_{\widehat{A'CB'}} = \alpha : \alpha'}$$



Poichè prendendo come angolo al centro α' l'intero angolo giro (ovvero i punti A' e B' coincidenti e $\alpha' = 360^\circ$) si ottiene ovviamente $\ell_{\widehat{A'A'}} = 2\pi r$ ed $\mathcal{A}_{\widehat{A'CA'}} = \pi r^2$, il teorema precedente permette (risolvendo la proporzione) di determinare la *lunghezza di un qualunque arco di circonferenza* e l'*area di un qualunque settore circolare*; in particolare, si ha:

r : raggio della circonferenza

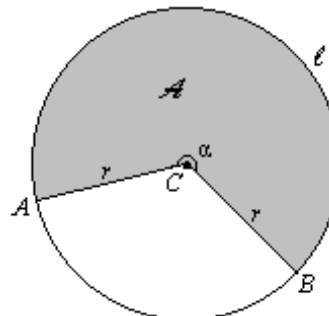
α : ampiezza (misurata in gradi) dell'angolo al centro $\widehat{ACB}$

$\ell_{\widehat{AB}}$: lunghezza dell'arco $\widehat{AB}$

$\mathcal{A}_{\widehat{ACB}}$: area del settore $\widehat{ACB}$

$$\boxed{\ell_{\widehat{AB}} = \frac{2\pi}{360} \alpha r}$$

$$\boxed{\mathcal{A}_{\widehat{ACB}} = \frac{\pi}{360} \alpha r^2}$$

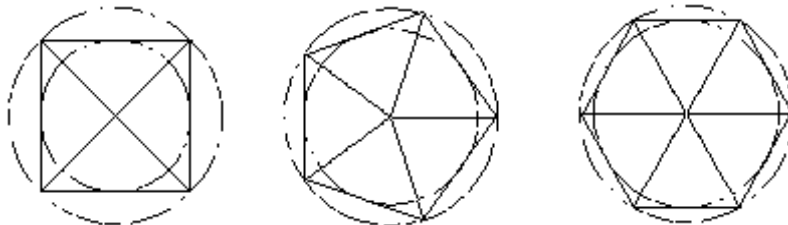


6.2.7 Altri poligoni regolari

Si è visto che triangoli equilateri e quadrati sono poligoni regolari, ma esistono poligoni regolari con un numero qualsiasi di lati: pentagoni regolari (5 lati), esagoni regolari (6 lati), ettagoni regolari (7 lati),

Un poligono si dice *inscritto* in una circonferenza (la quale è detta *circoscritta* al poligono) se e solo se tutti i vertici del poligono appartengono a tale circonferenza. Un poligono si dice *circoscritto* ad una circonferenza (la quale è detta *inscritta* nel poligono) se e solo se tutti i lati del poligono sono tangenti a tale circonferenza.

Teorema. Ogni poligono regolare è inscrittibile e circoscrittibile ed i centri delle circonferenze circoscritta e inscritta coincidono.



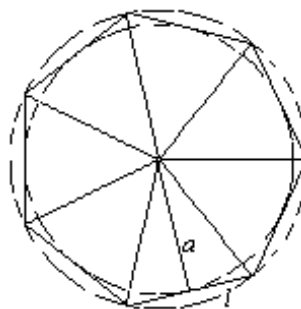
Il centro delle circonferenze inscritta e circoscritta ad un poligono regolare si dice anche *centro del poligono*. Il centro di un poligono regolare con un numero pari di lati coincide con il punto di incontro delle sue diagonali, che sono diametri della circonferenza circoscritta. I raggi che uniscono il centro di un poligono regolare di n lati con i suoi vertici dividono il poligono in n triangoli isosceli tra loro congruenti, la cui altezza è detta **apotema** del poligono e coincide con il raggio della circonferenza inscritta.

Area

L'area di un poligono regolare di n lati è ovviamente data dalla somma delle aree degli n triangoli determinati dai raggi della circonferenza circoscritta che uniscono il centro del poligono con i suoi vertici. Dunque

n : numero dei lati
 l : lunghezza di ciascun lato
 a : apotema
 $\mathcal{A}$: area

$$\mathcal{A} = n \frac{la}{2}$$



Brevemente:

$$Area = (numero\ lati) \frac{lato \times apotema}{2} .$$

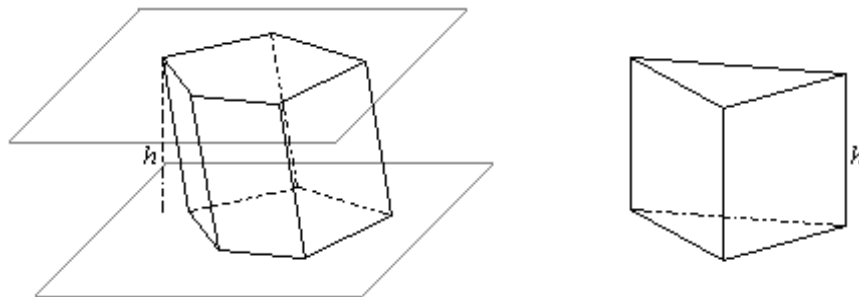
6.3 Geometria nello spazio

Per quanto riguarda la geometria non piana, ci limitiamo ad elencare alcune formule, relative a misure di estensione, per certe figure solide: parallelepipedi (tra cui i cubi), cilindri, coni e sfere; le proprietà fondamentali di tali figure possono forse essere considerate note intuitivamente e ci accontenteremo di riassumerle graficamente.

Denoteremo con $\mathcal{V}$ il *volume* del solido e con $\mathcal{A}$ l'area della superficie che lo delimita, spesso chiamata *superficie totale* (per distiguerla dalla *superficie laterale* che, come vedremo, è utile evidenziare in certi solidi).

6.3.1 Prisma

Un prisma ad $n + 2$ facce è ottenuto intersecando n rette parallele nello spazio con 2 piani paralleli tra loro.



I poligoni che si disegnano su tali piani sono congruenti e si dicono *basi* del prisma, le cui restanti facce sono dette *facce laterali* e formano la *superficie laterale*. Lati e vertici delle basi sono rispettivamente gli *spigoli di base* ed i *vertici* del prisma, mentre i lati delle facce laterali sono detti *spigoli laterali*. Si chiama *altezza* del prisma la distanza tra i piani su cui giacciono le sue basi. L'area di ciascuna base è detta *area di base*, mentre il suo perimetro è detto *perimetro di base*; l'area della superficie laterale si dice *area laterale*. Si ha

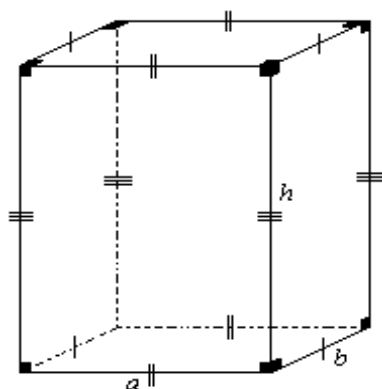
$$\boxed{\mathcal{V} = \mathcal{A}_b h} \quad \boxed{\mathcal{A} = 2\mathcal{A}_b + \mathcal{A}_l} \quad \boxed{\mathcal{A}_l = p_b h} \quad (*)$$

dove $\mathcal{A}_b$ è l'area di base, h è l'altezza, p_b è il perimetro di base e $\mathcal{A}_l$ è l'area laterale.

Un prisma si dice **retto** se solo se gli spigoli laterali sono perpendicolari ai piani delle basi. Un prisma si dice **regolare** se solo se è retto e le sue basi sono poligoni regolari.

Parallelepipedo rettangolo

È un particolare prisma retto. Scelte due facce (rettangolari) opposte qualsiasi come basi, le loro dimensioni sono gli spigoli di base del parallelepipedo ed il rimanente spigolo ne è l'altezza. Valgono le relazioni (*) con



$$p_b = 2a + 2b$$

$$\mathcal{A}_b = ab$$

Cubo

È un parallelepipedo rettangolo in cui tutti gli spigoli sono congruenti. Si tratta di un prisma regolare, in cui tutte le facce sono quadrati tra loro congruenti; se ℓ è il lato di tali quadrati (ossia lo spigolo del cubo), si ha

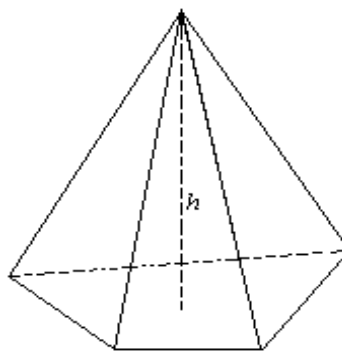
$$\mathcal{V} = \ell^3 \quad \text{e} \quad \mathcal{A} = 6\ell^2.$$

6.3.2 Piramide

Una piramide è ottenuta unendo i vertici di un poligono (detto *base* della piramide) ad un punto (detto *vertice* della piramide) non appartenente al piano della base; i triangoli che si vengono così a determinare si dicono *facce laterali*. Si chiama *altezza* della piramide la distanza tra il suo vertice ed il piano della base, la cui area è detta *area di base*.

h : altezza
 $\mathcal{A}_b$: area di base

$$\mathcal{V} = \frac{\mathcal{A}_b h}{3}$$



Tetraedro regolare

È una piramide a base triangolare in cui tutti gli spigoli sono congruenti. Tutte le facce sono allora triangoli equilateri tra loro congruenti; se ℓ è il lato di tali triangoli (ossia lo spigolo del tetraedro), si ha

$$\mathcal{V} = \frac{\sqrt{2}}{12}\ell^3 \quad \text{e} \quad \mathcal{A} = \sqrt{3}\ell^2.$$

6.3.3 Cilindro

Un cilindro è generato dalla rotazione di un rettangolo attorno ad un suo lato; tale lato si dice *asse* del cilindro e la sua lunghezza si dice *altezza* del cilindro; la lunghezza dei lati non paralleli all'asse ed i cerchi da essi descritti nella rotazione si dicono, rispettivamente, *raggio* e *basi* del cilindro; la superficie descritta nella rotazione dal lato opposto all'asse si dice *superficie laterale* del cilindro. L'area di ciascuna base è detta *area di base*, mentre l'area della superficie laterale si

dice *area laterale*.

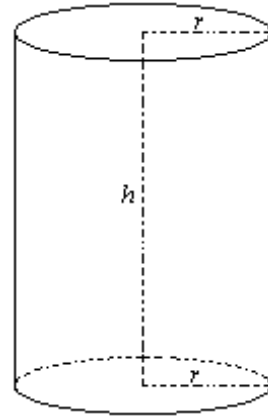
r : raggio
 h : altezza
 $\mathcal{A}_b$: area di base
 $\mathcal{A}_l$: area laterale

$$\mathcal{A}_b = \pi r^2$$

$$\mathcal{V} = \mathcal{A}_b h$$

$$\mathcal{A}_l = 2\pi r h$$

$$\mathcal{A} = 2\mathcal{A}_b + \mathcal{A}_l$$



6.3.4 Cono

Un cono è generato dalla rotazione di un triangolo rettangolo attorno ad un suo cateto; tale cateto si dice *asse* del cono e la sua lunghezza si dice *altezza* del cono; la lunghezza dell'altro cateto ed il cerchio da esso descritto nella rotazione si dicono, rispettivamente, *raggio* e *base* del cono; la lunghezza dell'ipotenusa e la superficie da essa descritto nella rotazione si dicono, rispettivamente, *apotema* e *superficie laterale* del cono. L'area della base è detta *area di base*, mentre l'area della superficie laterale si dice *area laterale*.

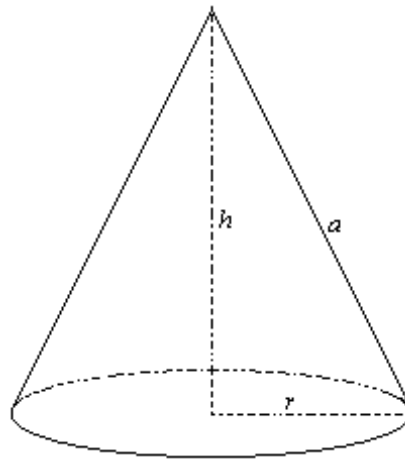
r : raggio
 h : altezza
 a : apotema
 $\mathcal{A}_b$: area di base
 $\mathcal{A}_l$: area laterale

$$\mathcal{A}_b = \pi r^2$$

$$\mathcal{V} = \frac{\mathcal{A}_b h}{3}$$

$$\mathcal{A}_l = \pi r a$$

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_b + \mathcal{A}_l$$



6.3.5 Sfera

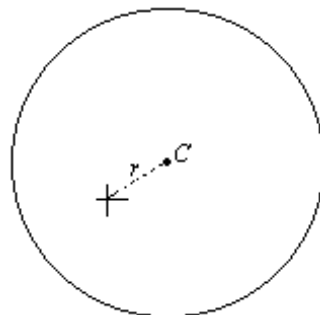
La sfera di *centro* C e *raggio* r è il luogo dei punti dello spazio che hanno distanza minore o uguale ad r dal punto C ; la superficie che delimita tale sfera è invece,

evidentemente, il luogo dei punti dello spazio che hanno distanza uguale ad r da C .

r : raggio

$$\mathcal{V} = \frac{4}{3}\pi r^3$$

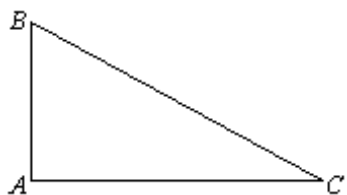
$$\mathcal{A} = 4\pi r^2$$



Esercizi

1. Dato un triangolo rettangolo di ipotenusa BC , la somma dei cateti sia pari a 17 cm e uno dei due cateti sia $\frac{5}{12}$ dell'altro. Trovare il perimetro P e l'area S del triangolo.

Siccome



$$\begin{cases} AB + AC = 17 \\ AB = \frac{5}{12}AC \end{cases}$$

si trova $AB = 5$ cm e $AC = 12$ cm. Tramite il teorema di Pitagora si ottiene poi $BC = 13$ cm.

$$[P = 30 \text{ cm}; S = 30 \text{ cm}^2]$$

2. Data una circonferenza di diametro $AB = 12$ m, si consideri il quadrato inscritto in tale circonferenza. Quanto misura l'area S compresa tra il quadrato e il cerchio?

Si osservi che la diagonale del quadrato è uguale al diametro della circonferenza.

$$[S = 36(\pi - 2) \text{ m}^2]$$

3. Data una circonferenza di raggio 2 m, si calcoli la lunghezza della corda AB sulla quale insistono angoli alla circonferenza di ampiezza pari a 45° .

Si consideri il triangolo ABC tale per cui il lato BC sia anche diametro della circonferenza; in questo modo si avrà $\hat{A} = 90^\circ$, essendo il triangolo inscritto in una semicirconferenza. A questo punto si tratta semplicemente di calcolare un cateto di un triangolo rettangolo che è isoscele, in quanto $\hat{B} = \hat{C} = 45^\circ$.

$$[AB = 2\sqrt{2} \text{ m}]$$

4. I segmenti di tangente ad una circonferenza uscenti da un punto esterno P sono ciascuno di 28 cm. Detti M e N i punti di contatto, determinare il perimetro del rettangolo equivalente al triangolo MPN , sapendo che il raggio della circonferenza è 24 cm e che una dimensione del rettangolo è 24.5 cm.

Le proprietà fondamentali da ricordare in questo esercizio sono che, detto O il centro della circonferenza, gli angoli $\widehat{OMP}$ ed $\widehat{ONP}$ sono retti ed il segmento OP è la bisettrice dell'angolo $\widehat{MPN}$. Si può calcolare OP come ipotenusa del triangolo rettangolo OPN ; l'altezza relativa all'ipotenusa NH è la metà della base del triangolo isoscele MPN di cui si vuole calcolare l'area; l'altezza di tale triangolo è la proiezione PH del cateto NP sull'ipotenusa OP del triangolo rettangolo OPN , determinabile con il teorema di Euclide. [80.6 cm circa]

5. Calcolare l'area $\mathcal{A}$ dell'esagono regolare inscritto in una circonferenza di raggio 4.

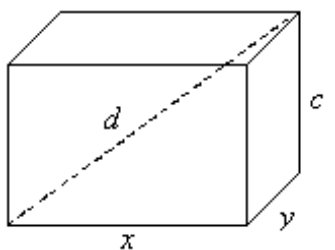
Si ricordi che un esagono regolare è formato da sei triangoli isosceli, i cui lati uguali coincidono con i raggi della circonferenza. [$\mathcal{A} = 24\sqrt{3}$]

6. Un prisma regolare triangolare ha tutti gli spigoli congruenti e il suo volume è $\mathcal{V} = 54a^3\sqrt{3}$. Si calcoli la lunghezza di uno spigolo. [6a]

7. Un'azienda confeziona latte in contenitori da 1 litro. A parità di spessore del materiale utilizzato, risulta più vantaggioso per l'azienda sagomare i contenitori a forma di tetraedro regolare oppure a forma di cubo?

Si confrontino le superfici laterali dei due solidi a parità di volume, sapendo che il volume di un tetraedro di spigolo s è $\mathcal{V} = \frac{\sqrt{2}}{12}s^3 \cong 0.12s^3$. [cubo]

8. Dato il parallelepipedo rettangolo del disegno



di cui sono noti $d = 2\sqrt{29}$, $c = 4$ e l'area di base uguale a 48, si calcolino gli spigoli x e y . [$x = 6$ e $y = 8$, o viceversa]

9. *Un solido è formato da un cubo sormontato da un cilindro, avente per base il cerchio inscritto nella faccia del cubo e l'altezza pari al doppio dello spigolo del cubo. La superficie totale del solido (comprese la base del cilindro e la faccia del cubo che si sovrappongono) ha area 2763 cm². Usando l'approssimazione $\pi \simeq 3.14$, determinare il raggio del cilindro, l'altezza del cilindro ed il volume dell'intero solido.*

Sia ℓ lo spigolo del cubo, cosicchè 2ℓ è l'altezza del cilindro. Il raggio del cerchio inscritto in una qualunque faccia del cubo è chiaramente $\ell/2$, che quindi è anche il raggio del cilindro. Le superfici totali di cubo e cilindro sono dunque $6\ell^2$ e $\pi\frac{\ell^2}{2} + 2\pi\ell^2$ e si ha allora

$$6\ell^2 + \pi\frac{\ell^2}{2} + 2\pi\ell^2 = 2763,$$

da cui $\ell^2 = \frac{5526}{12+5\pi} \simeq 200$ e, prendendo le radici, $\ell \simeq 14$. Il volume dell'intero solido sarà poi $\ell^3 + \pi\frac{\ell^3}{2}$. [7 cm circa; 28 cm circa; 7052 cm³ circa]