

Geometria Analitica

Lo spazio $\mathbb{R}^2$

$\mathbb{R}^2 \equiv \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y) | x, y \in \mathbb{R}\}$ (una coppia di numeri reali)

Distanza tra 2 punti

Dagli assiomi di Euclide, sappiamo che da due punti può passare una e una sola retta.

$$(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2 \leq d | \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty[$$

In parole umane, la distanza (d) tra i due punti definiti da $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ che sono costituiti da numeri reali, è un valore che va da 0 a infinito, è definita da $d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) =$

$$\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

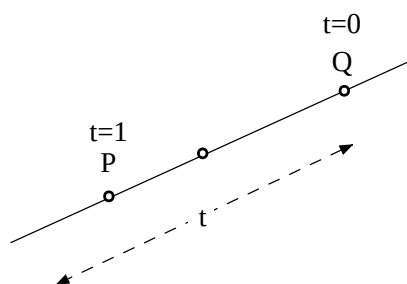
Proprietà

- $d(P, Q) \geq 0 \forall P, Q \in \mathbb{R}^2, d(P, Q) = 0 \Leftrightarrow P = Q$
- $d(P, Q) = d(Q, P) \forall P, Q \in \mathbb{R}^2$
- $d(P, Q) \leq d(P, R) + d(Q, R) \forall P, Q, R \in \mathbb{R}^2$
 - Questa proprietà è detta “Disuguaglianza triangolare” dato che rappresenta il fatto che la somma di due lati di un triangolo non può mai essere maggiore o uguale al terzo lato.
- Se i due punti hanno la stessa ascissa, $d = |y_2 - y_1|$
- Se i due punti hanno la stessa ordinata, $d = |x_2 - x_1|$

Forma implicita

Metodo 1: parametro

$$(x(t), y(t)) = t \cdot P + (1 - t) \cdot Q \quad t \in \mathbb{R}$$



Si rende esplicito per componenti

$$(x(t), y(t)) = (t_{x1}, t_{y1}) + ((1 - t) \cdot x_2, (1 - t) \cdot y_2)$$

Ovvero

$$\begin{cases} x(t) = t_{x1} + (1 - t)x_2 \\ y(t) = t_{y1} + (1 - t)y_2 \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}$$

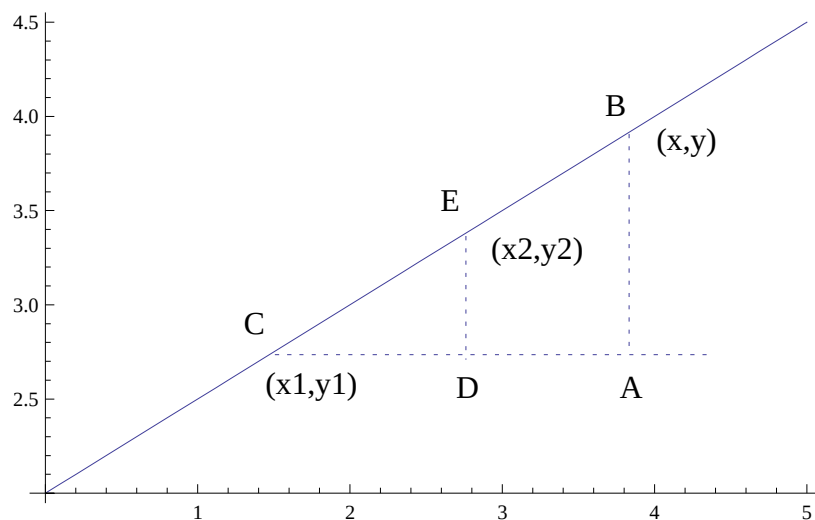
Supponendo che $x_1 \neq x_2 \wedge y_1 \neq y_2$, si ottiene

$$\begin{aligned} x(t) &= t_{x1} + x_2 - t_{x2} \rightarrow t(x_1 - x_2) = x(t) - x_2 \rightarrow t = \frac{x(t) - x_2}{x_1 - x_2} \\ y(t) &= t_{y1} + y_2 - t_{y2} \rightarrow t(y_1 - y_2) = y(t) - y_2 \rightarrow t = \frac{y(t) - y_2}{y_1 - y_2} \end{aligned}$$

$$\frac{x(t) - x_2}{x_1 - x_2} = \frac{y(t) - y_2}{y_1 - y_2}$$

Metodo 2: graficamente

(x, y) può assumere qualsiasi posizione. Bisogna misurare la distanza tra i punti E e C.



Si formano due triangoli simili, AC è parallelo all'asse delle ascisse, AB e DE all'asse delle ordinate.

Dalla similitudine dei triangoli si può scrivere che $(x - x_1):(x_2 - x_1) = (y - y_1):(y_2 - y_1)$
Quindi $AB:DE = AC:DC$

Vanno considerati i casi particolari:

- $x_1 = x_2, x = k = x_1$
- $y_1 = y_2, y = k = y_1$

Forma esplicita

$$y = mx + q$$

Coefficiente Angolare e q

$$m = \frac{y_b - y_a}{x_b - x_a} = \frac{y_a - y_b}{x_a - x_b} = \frac{\text{incremento verticale}}{\text{incremento orizzontale}}$$

m è detto coefficiente angolare, e determina l'inclinazione della retta rispetto all'asse x, mentre q determina a che altezza y si trova dal punto O dove $x=0$ (**ordinata all'origine**).

Una equazione dove $q=0$ rappresenta una retta passante per l'origine. All'incrementare di q la retta viene traslata verticalmente.

Il coefficiente angolare per una retta che passa per l'origine:

- Se $m > 0$ la retta passa per il 1 e il 3 quadrante (angolo acuto)
- Se $m < 0$ la retta passa per il 2 e il 4 quadrante (angolo ottuso)
- Se $m=1$ la retta è bisettrice del 1 e 3 quadrante (45° rispetto a x, inclinazione 100%)
- Se $m=-1$ la retta è bisettrice del 2 e 4 quadrante (135° rispetto a x)
- Se $m=0$ corrisponde all'asse x

Retta parallela

Una retta $y = mx + q$ è parallela ad una retta $y = m'x + q'$ se $\{(x, y) | y = mx + q\} \cap \{(x, y) | y = m'x + q'\} \neq \emptyset$, quindi le due rette non devono avere punti in comune.

$$m = m' \wedge q \neq q'$$

Retta perpendicolare

La retta r di equazione $y = mx + q$ e la retta s di equazione $y = m'x + q'$ sono tra loro perpendicolari se $m \cdot m' = -1$.

Dimostrazione

Se voglio che le due rette con angoli orientati α e β siano perpendicolari, $\beta = \frac{\pi}{2} + \alpha$. Si esegue un limite perché a $\frac{\pi}{2}$ la tangente non è definita.

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \tan(x + \alpha) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\tan x + \tan \alpha}{1 - \tan x \tan \alpha} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\tan x \left(1 + \frac{\tan \alpha}{\tan x}\right)}{\tan x \left(\frac{1}{\tan x} - \tan \alpha\right)} = \left[\frac{1+0}{0-\infty} \right] = -\frac{1}{\tan \alpha} = -\frac{1}{m}$$

Osservazione

$$r \perp s \Rightarrow m = \operatorname{tg} \alpha, m' = \operatorname{tg} \left(\alpha + \frac{\pi}{2} \right)$$

Questo perché $\frac{\pi}{2}$ è l'angolo retto, e qualunque coppia di rette parallele forma un angolo retto.

Esempio

Data la retta r di equazione $y = 2x$, determinare la retta s passante per $P \equiv (2,5) \perp r$

Si crea un fascio di rette passante per P , si determina il coeff. angolare della retta che si vuole

$$y - 5 = m'(x - 2), \quad m' = -\frac{1}{m} = -\frac{1}{2}$$

A questo punto si immette nella equazione del fascio di rette il coeff. angolare e si trova la eq.

$$y - 5 = -\frac{1}{2}(x - 2), \quad y = -\frac{1}{2}x + 6$$

Osservazione

Se i primi due termini (a, b) della forma implicita della equazione sono uguali, allora le due rette sono parallele, se (c) è diverso.

Se invece **uno solo dei termini (a,b) cambia di segno**, allora è perpendicolare; da notare come non importa se c cambia di segno, dato che è sconosciuto (e anche se fosse non cambierebbe la perpendicolarità).

Retta passante per due punti

Si conoscono le coordinate di due punti e si deve determinare la equazione della retta passante.

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$

Intersezione con gli assi

Basta ipotizzare che nella equazione y o x siano 0 (a seconde dell'asse). Per trovare il punto di intersezione con y basta porre $y=0$ nella equazione e si trova x .

Fasci di rette

Proprio, passante per un punto

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$P \equiv (x_1, y_1), m \in \mathbb{R}, x = x_1 \text{ per } m = \infty$

Esempio

Calcolare l'equazione della retta passante per $P \equiv (1,2)$ e $Q \equiv (2,3)$ usando un fascio proprio.

Si considera il fascio di rette passanti per P:

$$y - y_p = m(x - x_p) \rightarrow y - 2 = m(x - 1)$$

Si applicano le coordinate di Q alla equazione ricavata:

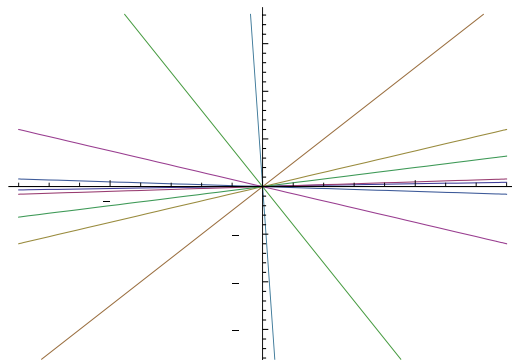
$$3 - 2 = m(2 - 1) \text{ in questo modo si ricava il coefficiente angolare } m = 1$$

Ora si va a creare la equazione della retta con coefficiente $m = 1$ che passa per uno dei punti:

$$y - 2 = 1(x - 1) \rightarrow y = x + 1$$

Osservazione

Il coefficiente angolare m della retta passante per P e Q è la tangente dell'angolo orientato in senso antiorario formato dalla retta con il semiasse positivo delle x. $m = \tan \alpha$

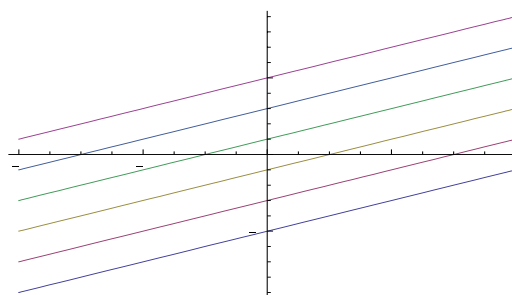


Improprio, di rette parallele

L'insieme delle rette parallele alla retta $y = \bar{m}x + \bar{q}$ è dato dall'insieme $\{y = \bar{m}x + Q, q \in \mathbb{R}\}$, quindi è costituito da infinite rette parallele alla retta assegnata.

Esempio

Data la retta $r: y = 2x + 3$, determinare la retta parallela ad r , passante per il punto $(1,10)$.



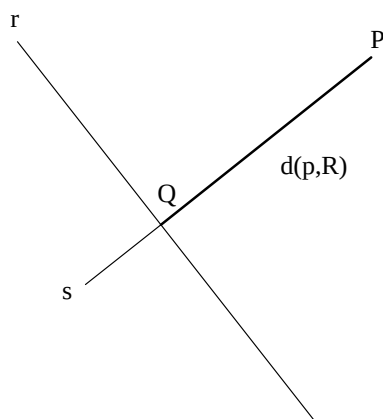
Si usa la equazione del fascio improprio di rette $y = 2x + Q, q \in \mathbb{R}$, basta sostituire a x,y le coordinate del punto passante $10 = 2 \cdot 1 + Q$ e si determina che $Q = 8$

Quindi la retta parallela e passante per il punto ha equazione $y = 2x + 8$

Distanza minima punto-retta

Dato un punto $P \equiv (p_x, p_y)$ e $r: ax + by + c = 0$, la distanza tra P e r è:

$$d(P, r) = \frac{|ap_x + bp_y + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$



Dimostrazione

La distanza è il segmento d perpendicolare a r che passa per P .

Si crea un fascio di rette $\perp r$:

$$-bx + ay + q = 0, \quad q \in \mathbb{R}$$

Per imporre il passaggio, si sostituisce P a x, y nella equazione:

$$-bp_x + ap_y + q = 0, \quad q = bp_x - ap_y$$

Si trova la retta $s \perp r$ passante per P sostituendo q :

$$s: -bx + ay + bp_x + ap_y = 0$$

Ora bisogna determinare il punto Q :

$$\begin{cases} ax + by = -c \\ -bx + ay = ap_y - bp_x \end{cases}$$

Si applica il metodo di riduzione due volte:

$$y = \frac{a^2 p_y - ab p_x - bc}{a^2 + b^2}, \quad x = \frac{b^2 p_x - ab p_y - ac}{a^2 + b^2}$$

Si calcola la distanza tra P e Q (formulone enorme non scritto), il valore assoluto si aggiunge quando si fa uscire il quadrato dalla radice.

Equazione della circonferenza

La circonferenza è il luogo dei punti equidistanti (distanza R detto raggio) da un punto fisso detto centro ($C \equiv (x_0, y_0)$).

$$(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2 = R^2$$

Dimostrazione

P è il luogo dei punti tale che $d(P, C) = R$, quindi si trova sulla parte più esterna.

$$\sqrt{(x_p - x_c)^2 + (y_p - y_c)^2} = R \rightarrow (x - x_c)^2 + (y - y_c)^2 = R^2$$

Osservazione

Svolgendo si ottiene $x^2 + y^2 - 2xy_c - 2yy_c + x_c^2 + y_c^2 - R^2 = 0$

- I termini di secondo grado sono concordi
- Manca il termine misto xy
- Il termine di grado 0 è $x_c^2 + y_c^2 - R^2$

Esempio

Data l'equazione $x^2 + y^2 - 2x - 6y - 6 = 0$

1. Provare che è una circonferenza
2. Determinare il raggio

Sono presenti due termini di secondo grado concordi e manca xy , quindi se esiste il raggio, è una circonferenza.

Per costruire la forma canonica della equazione della circonferenza bisogna costruire dei quadrati di binomi, quindi si aggiungono i termini $+1 - 1 + 9 - 9$ alla equazione. Si possono poi ricavare i due quadrati dalle porzioni $x^2 - 2x + 1$ e $y^2 - 2y \cdot 3 + 9$.

Quindi si avrà $(x - 1)^2 + (y - 3)^2 = 16$, dove 16 è il quadrato del raggio.

Il raggio quindi è 4.

Posizioni reciproche tra circonferenza e retta

- Esterna, quindi $C \cap R = \emptyset$
- Tangente, quindi $C \cap R = \{P_1\}$

- Secante, quindi $C \cap R = \{P_1, P_2\}$

Cerchio

Il luogo dei punti tali che $\{(x, y) | (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 \leq R^2\}$, quindi i punti della circonferenza e tutti quelli racchiusi da essa. In pratica l'area.

Retta tangente a circonferenza

$$y - p_y = -\frac{p_x - x_0}{p_y - y_0} \cdot (x - p_x)$$

Dimostrazione

Data una circonferenza con centro $C \equiv (x_0, y_0)$ e raggio R , determinare l'equazione della retta tangente nel punto $P \equiv (p_x, p_y)$ appartenente alla circonferenza.

Metodo 1

Considero il fascio di rette passante per P , una sola è tangente alla circonferenza.

$$\begin{cases} (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2, & \text{circonferenza} \\ y - p_y = m(x - p_x), & \text{fascio di rette} \end{cases}$$

Si risolve il sistema:

$$(x - x_0)^2 + (mx + p_y - mp_x - y_0)^2 = R^2$$

Sviluppando, aggiungendo e rimuovendo p_x :

$$(x - p_x + p_x - x_0)^2 + m^2(x - p_x)^2 + (p_y - y_0)^2 + 2m(x - p_x)(p_y - y_0) = R^2$$

Si sviluppa il quadrato del binomio:

$$(x - p_x)^2 + 2(x - p_x)(p_x - x_0) + (x - x_0)^2 + m^2(x - p_x)^2 + (p_y - y_0)^2 + 2m(x - p_x)(p_y - y_0) = R^2$$

Dato che p_x e p_y appartengono alla circonferenza, allora si annulla $(p_x - x_0)^2 + (p_y - y_0)^2 = R^2$, quindi si tolgono i termini dalla equazione:

$$(x - p_x) \cdot [x - p_x + 2(p_x - x_0) + m^2(x - p_x) + 2m(p_y - y_0)] = 0$$

Per la legge di annullamento del prodotto, una soluzione è $x = p_x$, ma vogliamo che sia unica, $x = p_x$ nel secondo termine si annulla, quindi risulta:

$$m = -\frac{p_x - x_0}{p_y - y_0}$$

Dunque, l'equazione della retta tangente è:

$$y - p_y = -\frac{p_x - x_0}{p_y - y_0} \cdot (x - p_x)$$

Metodo 2

Si osserva che la retta passante per (x_0, y_0) (il centro) e per (p_x, p_y) ha equazione $\frac{y - y_0}{p_y - y_0} = \frac{x - x_0}{p_x - x_0}$,

$$\text{quindi } y - y_0 = \frac{y - y_0}{p_x - x_0} (x - x_0)$$

La tangente avrà $m' = -\frac{1}{m}$, quindi $m' = -\frac{p_x - x_0}{p_y - y_0}$, ma essa è una retta passante per p_x, p_y , quindi:

$$y - p_y = -\frac{p_x - x_0}{p_y - y_0} \cdot (x - p_x)$$

Esempio

Calcolare la equazione della circonferenza di centro C e tangente alla retta r .

Basta usare la formula per calcolare la distanza punto-retta (oppure fascio di rette improprio che incontra C) per calcolare il raggio, poi si compone la equazione della circonferenza.

Esempio

Trovare i valori di $k \in \mathbb{R}$ tali che la retta r risulti esterna alla circonferenza c e quelli per cui è tangente.

In questo esercizio bisogna creare un fascio di rette improprio parallele a $r: y = x + k$, e determinare per quali valori di k nella equazione della retta non sono presenti soluzioni ($\Delta = 0$ quindi non interseca, quindi la retta è esterna alla circonferenza) e per quali valori è presente una sola soluzione ($\Delta = 0$, saranno presenti due casi perché la retta è tangente alla circonferenza in due punti).

Per prima cosa si crea un sistema con le due equazioni, si risolve e si ottiene una equazione di secondo grado. Si trova il valore del Δ (con il parametro k) e poi lo si pone minore di 0 o uguale a 0 a seconda del caso. Si trova k .

Per i punti di tangenza basta sostituire k nella equazione.

Esempio

Determina i punti appartenenti alla retta r che hanno distanza d dalla retta s .

Bisogna prendere un generico punto della retta r $P(x, y = f(x))$ dove al posto di y si mette l'equazione della retta. Si applica la formula per trovare la distanza da punto a retta, immettendo i valori (nota che p_x diventa l'incognita x , p_y viene sostituita dalla equazione della retta r):

$$d(P, s) = \frac{|ap_x + bp_y + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

E si ottengono due soluzioni (vedi valore assoluto), che sono i due punti sulla retta r .

Parabola

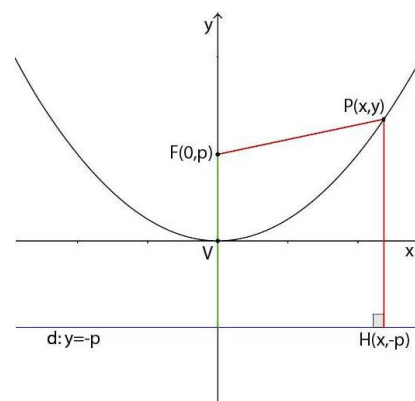
È il luogo dei punti equidistanti dal punto fuoco e dalla retta direttrice, che è perpendicolare all'asse di simmetria.

Ci sono due tipi di parabole, con l'asse di simmetria parallelo a y oppure a x.

$$\begin{aligned}\parallel y &\rightarrow y = ax^2 + bx + c \\ \parallel x &\rightarrow x = ay^2 + by + c\end{aligned}$$

Da notare che per la concavità:

- Se $a > 0$ la parabola è rivolta verso l'alto
- Se $a < 0$ la parabola è rivolta verso il basso



Asse di simmetria

Data la parabola $y = ax^2 + bx + c$ si dice asse la retta parallela a y che funge da asse di simmetria.

Si vuole trasformare una parte di equazione in un quadrato di un binomio:

$$\begin{aligned}y &= ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) \\ a\left(x^2 + 2 \cdot \frac{b}{2a}x + \frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2}\right) &= a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right]\end{aligned}$$

Si ottiene:

$$a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + c - \frac{b^2}{4a^2}$$

- a indica la concavità della parabola
- $\frac{b}{2a}$ indica la traslazione nell'asse x
- $c - \frac{b^2}{4a^2}$ indica la traslazione nell'asse y

Quindi si ricava il vertice e l'equazione dell'asse di simmetria:

$$V\left(-\frac{b}{2a}, c - \frac{b^2}{4a^2}\right) \text{ asse: } x = -\frac{b}{2a}$$

Esempio

Calcolare la tangente in $P \equiv (\bar{x}, \bar{y})$ alla parabola $y = x^2 + bx + c$.

Si crea un fascio di rette passante per P :

$$\begin{cases} y = x^2 + bx + c \\ y - \bar{y} = m(x - \bar{x}) \end{cases} \rightarrow (x - \bar{x})(x + \bar{x} + b - m) = 0$$

La equazione ha soluzione doppia:

$x = \bar{x} \vee 2\bar{x} + b - m = 0$, quindi si ricava il coeff. angolare della tangente $m = 2\bar{x} + b$ e alla fine la equazione della tangente:

$$y - \bar{y} = (2\bar{x} + b)(x - \bar{x})$$