

Elementi di Logica

Glossario

Proposizione elementare: frase di tipo affermativo dalla quale si possa stabilire se è vera o falsa. Una proposizione non può essere vera e falsa oppure nessuna dei due. Per esempio una proposizione può essere: [17 è un numero dispari = Vero]. Sinteticamente una proposizione è il significato di una dichiarazione.

Proposizione composta: più proposizioni elementari unite da operazioni logiche.

Proposizione decidibile: una proposizione che può essere provata o confutata. Alcune proposizioni non possono avere una risposta certa (Antinomia di Russel).

Connettivi

In pratica il risultato dice: “Funziona la operazione?”. **Per semplicità la somma e il prodotto si possono eseguire come una addizione o una moltiplicazione.**

Congiunzione (Prodotto logico)

Date due proposizioni P e Q, si dice prodotto logico la proposizione che è vera solo se entrambe le proposizioni risultano vere.

“Se tutti sono veri, allora vero”

$$P \wedge Q = AND$$

P	Q	$P \wedge Q$
1	1	1
0	1	0
1	0	0
0	0	0

Disgiunzione inclusiva (Somma logica)

Il contrario della congiunzione. Date due proposizioni P e Q, si dice somma logica la proposizione che è vera se almeno una delle due proposizioni risulta vera.

“Se almeno uno è vero, allora vero”

“Oggi ci sarà nuvolo oppure bel tempo”

$$P \vee Q = OR$$

P	Q	$P \vee Q$
1	1	1
0	1	1
1	0	1
0	0	0

Disgiunzione esclusiva (XOR)

Vero se e solo se uno solo degli operatori è vero.

“O uno o l'altro”

“O c'è nuvolo o c'è libero, non possono esserci entrambi”

$$P \dot{\vee} Q = XOR$$

P	Q	$P \vee Q$
1	1	0
0	1	1
1	0	1
0	0	0

Negazione logica

Data la proposizione P, si dice negazione logica la forma proposizionale che è vera se P è falsa e viceversa. È un operatore unario, quindi accetta solo un argomento.

“Il contrario”

$$\neg P = NOT$$

P	$\neg P$
1	0
0	1

Implicazione logica

Date due proposizioni P e Q, si dice implicazione logica la relazione che sussiste nel caso in cui dalla verità di P segue la verità di Q. Se invece P è falsa, Q potrebbe essere vera o falsa. Quindi è **condizione sufficiente** affinché Q sia vera che P sia vera. P non può essere vera se Q non è vera.

Non è possibile che P sia vera se Q è falso.

“Se piove (P) allora ci sono nuvole (Q) (non può piovere se non ci sono nuvole)”

“Falsa se solo P è vero”

$$P \Rightarrow Q \text{ (P implica Q) (se P allora Q)}$$

P	Q	$P \Rightarrow Q$
1	1	1
0	1	1
1	0	0
0	0	1

Doppia implicazione logica

Se $P \Rightarrow Q$ e $Q \Rightarrow P$ allora si dice che P è **condizione necessaria e sufficiente** per Q.

In pratica si guarda simmetricamente, le condizioni devono essere uguali, altrimenti la proposizione è falsa.

“Se P succede Q, e se Q succede P”

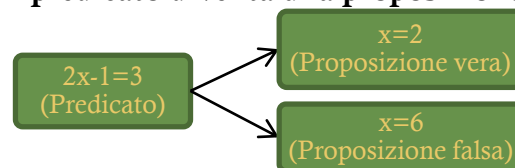
$$P \Leftrightarrow Q = Q \text{ se e solo se } P$$

P	Q	$P \Leftrightarrow Q$
1	1	1
0	1	0
1	0	0
0	0	1

Predicati

Un predicato è una frase contenente una o più variabili libere (per esempio $P(x)$ è un predicato che dipende da x , non ha un valore intrinseco, ma cambia a seconda della variabile).

A seconda della variabile, il predicato diventa una proposizione.



Esempio

$P(x)$ = "Nel luogo x sta piovendo" è un predicato, diventa proposizione solo se si sa il luogo.

$\forall x, P(x)$ = In ogni luogo sta piovendo, una proposizione con un quantificativo

$\exists x, P(x)$ = Esiste almeno un luogo in cui sta piovendo

Quantificatori

$\exists$ = Esiste almeno un elemento

$\exists!$ = Esiste un solo elemento

$\forall$ = Per qualsiasi

Proprietà

Commutativa: $P \wedge Q \equiv Q \wedge P$

Associativa: $(P \vee Q) \vee R \equiv P \vee (Q \vee R)$

Regole Logiche

Principio del terzo escluso

Per ogni proposizione, o è vera, o è vera la negazione. Un altro modo di dire che la proposizione può essere solo vera o falsa.

$\forall P, (P \vee \neg P)$

Principio di non contraddizione

Una proposizione non può essere contemporaneamente vera e falsa.

$\forall P, \neg(P \wedge \neg P)$

Principio di transitività

La implicazione si propaga.

$\forall P, Q, R \ [(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow R)] \Rightarrow (P \Rightarrow R)$

Negazione di Predicati

Per negare un predicato con un quantificatore si usano le seguenti regole:

1. $\forall x, P(x) \rightarrow \exists x \mid \neg P(x)$ Tutti – Almeno uno non...
2. $\neg(\forall x, P(x)) \rightarrow \exists x \mid P(x)$ Nessuno – Almeno uno...
3. $P \Rightarrow Q \rightarrow P \wedge \neg Q$ Se piove mi bagno – Piove e non mi bagno
4. $P \wedge Q \rightarrow \neg P \vee \neg Q$ Ho caldo e sete – Non ho caldo oppure non ho sete
5. $P \vee Q \rightarrow \neg P \wedge \neg Q$ Ho fame e sono stanco – Non ho fame e non sono stanco
6. $\neg[\exists x \mid \forall y, R(x, y)] \Leftrightarrow \forall x \mid \exists y, \neg R(x, y)$

Equivalenza logica

$$P \equiv Q$$

A e B sono logicamente equivalenti se entrambi assumono lo stesso valore di verità in ogni caso.

Esempio

$$P \wedge Q \equiv \neg[(\neg P) \vee (\neg Q)]$$

Metodi di Dimostrazione (regole di inferenza)

Modus Ponens (ragionamento diretto)

$$[(P \Rightarrow Q) \wedge P] \vdash Q$$

“(Se quando piove la strada è bagnata) e ora sta piovendo, allora la strada è bagnata”

Modus Tollens (ragionamento inverso)

$$[(P \Rightarrow Q) \wedge \neg Q] \vdash \neg P$$

“(Se quando piove la strada è bagnata) e ora la strada non è bagnata, allora non sta piovendo”

Contronominale

$$[A \Rightarrow B] \Leftrightarrow [(\neg B) \Rightarrow (\neg A)]$$

“Se quando piove la strada è bagnata, allora quando la strada non è bagnata non deve piovere”

Esempio dimostrazione

Dimostrazione della legge di annullamento del prodotto

$$\forall a, b \in \mathbb{R} \mid a \cdot b = 0 \Rightarrow a = 0 \vee b = 0$$

$$A: a \cdot b = 0, B: a = 0, C: b = 0$$

$$A \Rightarrow B \vee C - \text{contronominale} - \neg A \Leftarrow \neg B \wedge \neg C$$

$\neg B \wedge \neg C \Rightarrow \neg A$ se a e b sono diversi da 0, allora sicuramente anche $a \cdot b$ è diverso da 0

La proposizione è sempre vera.