

Equazioni Goniometriche e Esercizi Svolti

Prof. Francesco Zumbo

www.francescozumbo.it

- Equazioni goniometriche elementari
- Equazioni goniometriche riconducibili ad elementari
- Equazioni goniometriche lineari
- Equazioni goniometriche riconducibili a lineari
- Soluzione grafica delle equazioni goniometriche lineari
- Equazioni goniometriche omogenee
- Equazioni goniometriche riconducibili a omogenee
- Soluzione grafica delle equazioni goniometriche omogenee
- Equazioni goniometriche simmetriche

Angolo orientato		Funzioni goniometriche		
gradi	radiani	seno	coseno	tangente
0°	0	0	1	0
9°	$\frac{\pi}{20}$	$\frac{\sqrt{3+\sqrt{5}} - \sqrt{5-\sqrt{5}}}{4}$	$\frac{\sqrt{3+\sqrt{5}} + \sqrt{5-\sqrt{5}}}{4}$	$\frac{4 - \sqrt{10+2\sqrt{5}}}{\sqrt{5}-1}$
15°	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$	$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$	$2-\sqrt{3}$
18°	$\frac{\pi}{10}$	$\frac{\sqrt{5}-1}{4}$	$\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$	$\frac{\sqrt{25-10\sqrt{5}}}{5}$
22°30'	$\frac{\pi}{8}$	$\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$	$\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$	$\sqrt{2}-1$
30°	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
36°	$\frac{\pi}{5}$	$\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$	$\frac{\sqrt{5}+1}{4}$	$\sqrt{5-2\sqrt{5}}$
45°	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
54°	$\frac{3\pi}{10}$	$\frac{\sqrt{5}+1}{4}$	$\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$	$\frac{\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{5}$
60°	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$
72°	$\frac{3\pi}{5}$	$\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$	$\frac{\sqrt{5}-1}{4}$	$\sqrt{5+2\sqrt{5}}$
75°	$\frac{5\pi}{12}$	$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$	$\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$	$2+\sqrt{3}$
90°	$\frac{\pi}{2}$	1	0	$\rightarrow \pm\infty$

Capitolo 3

Geometria

3.1 Goniometria

3.1.1 Relazione Fondamentale

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

3.1.2 Tangente e Cotangente: Definizioni

Definizione 32 (Tangente) $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \forall x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$

Definizione 33 (Cotangente 1) $\cot x = \frac{\cos x}{\sin x} \forall x \neq k\pi$

Definizione 34 (Cotangente 2) $\cot x = \frac{1}{\tan x} \forall x \neq k\frac{\pi}{2}$

3.1.3 Secante e Cosecante: Definizioni

Definizione 35 (Secante) $\sec \alpha = \frac{1}{\cos \alpha}$

$\sec : \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\} \rightarrow \mathbb{R}$

Non è arcoseno!

Definizione 36 (Cosecante) $\csc \alpha = \frac{1}{\sin \alpha}$

$\csc : \mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\} \rightarrow \mathbb{R}$

3.1.4 Formule di Addizione

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta$$

$$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan \alpha \pm \tan \beta}{1 \mp \tan \alpha \tan \beta}$$

$$\cot(\alpha \pm \beta) = \frac{\cot \alpha \cot \beta \mp 1}{\cot \alpha \pm \cot \beta}$$

3.1.5 Formule di Duplicazione e di Triplicazione

$$\begin{aligned}\sin(2\alpha) &= 2 \sin \alpha \cos \alpha \\ \cos(2\alpha) &= \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 \\ \tan(2\alpha) &= \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha} \\ \sin(3\alpha) &= 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha \\ \cos(3\alpha) &= 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha \\ \tan(3\alpha) &= \frac{3 \tan \alpha - \tan^3 \alpha}{1 - 3 \tan^2 \alpha}\end{aligned}$$

3.1.6 Formule di Bisezione

$$\begin{aligned}\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) &= \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}} \\ \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) &= \pm \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}} \\ \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) &= \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}} = \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha} = \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha}\end{aligned}$$

3.1.7 Formule Parametriche

$$t \stackrel{def}{=} \tan \frac{\alpha}{2} \longrightarrow \begin{cases} \sin \alpha = \frac{2t}{1+t^2} \\ \cos \alpha = \frac{1-t^2}{1+t^2} \\ \tan \alpha = \frac{2t}{1-t^2} \end{cases}$$

3.1.8 Formule di Prostaferesi

$$\begin{aligned}\sin p + \sin q &= 2 \sin \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2} \\ \sin p - \sin q &= 2 \cos \frac{p+q}{2} \sin \frac{p-q}{2} \\ \cos p + \cos q &= 2 \cos \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2} \\ \cos p - \cos q &= -2 \sin \frac{p+q}{2} \sin \frac{p-q}{2}\end{aligned}$$

3.1.9 Formule di Werner

$$\begin{aligned}\cos p \cdot \sin q &= \frac{1}{2} [\sin(p+q) - \sin(p-q)] \\ \sin p \cdot \sin q &= \frac{1}{2} [\cos(p-q) - \cos(p+q)] \\ \cos p \cdot \cos q &= \frac{1}{2} [\cos(p+q) + \cos(p-q)]\end{aligned}$$

3.1.10 Formule di Conversione

☛ Tabella 3.1 a pag.19

3.1.11 Archi Noti

☛ Tabella 3.2 a pag.19

$\swarrow$	Sin	Cos	Tan
$\sin \alpha$	$\sin \alpha$	$\pm \sqrt{1 - \cos^2 \alpha}$	$\pm \frac{\tan \alpha}{\sqrt{1 + \tan^2 \alpha}}$
$\cos \alpha$	$\pm \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}$	$\cos \alpha$	$\pm \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 \alpha}}$
$\tan \alpha$	$\pm \frac{\sin \alpha}{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha}}$	$\pm \frac{\sqrt{1 - \cos^2 \alpha}}{\cos \alpha}$	$\tan \alpha$
$\cot \alpha$	$\pm \frac{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha}}{\sin \alpha}$	$\pm \frac{\cos \alpha}{\sqrt{1 - \cos^2 \alpha}}$	$\frac{1}{\tan \alpha}$
$\sec \alpha$	$\pm \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha}}$	$\frac{1}{\cos \alpha}$	$\pm \sqrt{1 + \tan^2 \alpha}$
$\csc \alpha$	$\frac{1}{\sin \alpha}$	$\pm \frac{1}{\sqrt{1 - \cos^2 \alpha}}$	$\pm \frac{\sqrt{1 + \tan^2 \alpha}}{\tan \alpha}$

Tabella 3.1: Formule di Conversione

Rad	Deg	Sin	Cos	Tan	Cot
0	0°	0	1	0	n.e.
$\frac{\pi}{12}$	15°	$\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$	$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$	$2 - \sqrt{3}$	$2 + \sqrt{3}$
$\frac{\pi}{8}$	22°30'	$\frac{\sqrt{2}-\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}+\sqrt{2}}{2}$	$\sqrt{2} - 1$	$\sqrt{2} + 1$
$\frac{\pi}{6}$	30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{4}$	45°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1
$\frac{\pi}{3}$	60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
$\frac{3}{8}\pi$	67°30'	$\frac{\sqrt{2}+\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}-\sqrt{2}}{2}$	$\sqrt{2} + 1$	$\sqrt{2} - 1$
$\frac{5}{12}\pi$	75°	$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$	$\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$	$2 + \sqrt{3}$	$2 - \sqrt{3}$
$\frac{\pi}{2}$	90°	1	0	n.e.	0

Tabella 3.2: Archi noti

Rad	Sin	Cos	Tan	Cot
x	$\sin x$	$\cos x$	$\tan x$	$\cot x$
$\pi - x$	$\sin x$	$-\cos x$	$-\tan x$	$-\cot x$
$\pi + x$	$-\sin x$	$-\cos x$	$\tan x$	$\cot x$
$-x$	$-\sin x$	$\cos x$	$-\tan x$	$-\cot x$
$2\pi - x$	$-\sin x$	$\cos x$	$-\tan x$	$-\cot x$
$\frac{\pi}{2} - x$	$\cos x$	$\sin x$	$\cot x$	$\tan x$
$\frac{\pi}{2} + x$	$\cos x$	$-\sin x$	$-\cot x$	$-\tan x$
$\frac{3}{2}\pi - x$	$-\cos x$	$-\sin x$	$\cot x$	$\tan x$
$\frac{3}{2}\pi + x$	$-\cos x$	$\sin x$	$-\cot x$	$-\tan x$

Tabella 3.3: Archi associati

3.1.12 Archi Associati

☛ Tabella 3.3 a pag.19

3.2 Trigonometria

3.2.1 Triangolo Qualsiasi

Area: $S = \frac{1}{2}ab \sin \gamma = \frac{1}{2}bc \sin \alpha = \frac{1}{2}ac \sin \beta$

$$S = \frac{1}{2}a^2 \frac{\sin \beta \sin \gamma}{\sin(\beta+\gamma)} = \frac{1}{2}b^2 \frac{\sin \alpha \sin \gamma}{\sin(\alpha+\gamma)} = \frac{1}{2}c^2 \frac{\sin \alpha \sin \beta}{\sin(\alpha+\beta)}$$

Teorema 2 (Formula di Erone) $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

Teorema 3 (Formula di Brahmagupta o di Erone) *Dato un quadrilatero ciclico (cioè inscritto in una circonferenza) di lati a, b, c, d e semiperimetro $p = \frac{a+b+c+d}{2}$, l'area vale $S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$; per $d = 0$, in particolare, si ottiene la formula di Erone per il triangolo.*

Teorema 4 (delle Corde) : $\overline{AB} = 2r \sin \alpha$

Teorema 5 (dei Seni) : $\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2R = \frac{abc}{4S}$

Proiezioni: $a = b \cos \gamma + c \cos \beta$;

$$b = a \cos \gamma + c \cos \alpha$$

$$c = a \cos \beta + b \cos \alpha.$$

Teorema 6 (di Carnot o del Coseno) :

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha;$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta;$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma.$$

3.2.2 Triangolo Rettangolo

Se a, b e c sono le misure rispettivamente dell'ipotenusa e dei cateti di un triangolo rettangolo e α , β e γ sono le misure degli angoli opposti, sussistono le seguenti relazioni:

$$b = a \sin \beta = a \cos \gamma$$

$$c = a \sin \gamma = a \cos \beta$$

$$b = c \tan \beta = c \cot \gamma$$

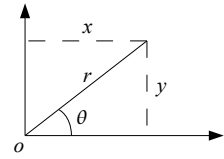
$$c = b \tan \gamma = b \cot \beta$$

Tavola di relazioni trigonometriche

Funzioni trigonometriche dell'angolo

$$\sin \theta = \frac{y}{r} \quad \cos \theta = \frac{x}{r} \quad \tan \theta = \frac{y}{x} \quad \cot \theta = \frac{x}{y} \quad \operatorname{cosec} \theta = \frac{1}{\sin \alpha} \quad \sec \alpha = \frac{1}{\cos \alpha}$$

la funzione seno è dispari, la funzione coseno è pari, la funzione tangente è dispari.



Relazioni fondamentali

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \quad \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \quad \cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$$

Espressione delle funzioni goniometriche mediante una di esse

	$\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$\tan \alpha$	$\cot \alpha$
$\sin \alpha =$	$\sin \alpha$	$\pm \sqrt{1 - \cos^2 \alpha}$	$\pm \frac{\tan \alpha}{\sqrt{1 + \tan^2 \alpha}}$	$\pm \frac{1}{\sqrt{1 + \cot^2 \alpha}}$
$\cos \alpha =$	$\pm \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}$	$\cos \alpha$	$\pm \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 \alpha}}$	$\pm \frac{\cot \alpha}{\sqrt{1 + \cot^2 \alpha}}$
$\tan \alpha =$	$\pm \frac{\sin \alpha}{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha}}$	$\pm \frac{\sqrt{1 - \cos^2 \alpha}}{\cos \alpha}$	$\tan \alpha$	$\frac{1}{\cot \alpha}$
$\cot \alpha =$	$\pm \frac{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha}}{\sin \alpha}$	$\pm \frac{\cos \alpha}{\sqrt{1 - \cos^2 \alpha}}$	$\frac{1}{\tan \alpha}$	$\cot \alpha$

Angoli associati, complementari e che differiscono di $\pi/2$

$\sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha$	$\cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha$	$\tan(\pi - \alpha) = -\tan \alpha$	$\cot(\pi - \alpha) = -\cot \alpha$
$\sin(\pi + \alpha) = -\sin \alpha$	$\cos(\pi + \alpha) = -\cos \alpha$	$\tan(\pi + \alpha) = \tan \alpha$	$\cot(\pi + \alpha) = \cot \alpha$
$\sin(2\pi - \alpha) = -\sin \alpha$	$\tan(2\pi - \alpha) = -\tan \alpha$	$\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$	$\tan(-\alpha) = -\tan \alpha$
$\cos(2\pi - \alpha) = \cos \alpha$	$\cot(2\pi - \alpha) = -\cot \alpha$	$\cos(-\alpha) = \cos \alpha$	$\cot(-\alpha) = -\cot \alpha$
$\sin(\pi/2 - \alpha) = \cos \alpha$	$\cos(\pi/2 - \alpha) = \sin \alpha$	$\tan(\pi/2 - \alpha) = \cot \alpha$	$\cot(\pi/2 - \alpha) = \tan \alpha$
$\sin(\pi/2 + \alpha) = \cos \alpha$	$\cos(\pi/2 + \alpha) = -\sin \alpha$	$\tan(\pi/2 + \alpha) = -\cot \alpha$	$\cot(\pi/2 + \alpha) = -\tan \alpha$

Formule di addizione e sottrazione

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta \quad \cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta$$

$$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan \alpha \pm \tan \beta}{1 \mp \tan \alpha \tan \beta} \quad \cot(\alpha \pm \beta) = \frac{\cot \alpha \cot \beta \mp 1}{\cot \beta \pm \cot \alpha}$$

Formule di duplicazione, triplicazione e bisezione

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha \quad \cos^2 \alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 \quad \tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}$$

$$\sin 3\alpha = 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha \quad \cos 3\alpha = 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha \quad \tan 3\alpha = \frac{3 \tan \alpha - \tan^3 \alpha}{1 - 3 \tan^2 \alpha}$$

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}} \quad \cos \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}} \quad \tan \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}} = \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha} = \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha}$$

Formule parametriche

$$\sin \alpha = \frac{2 \tan \frac{\alpha}{2}}{1 + \tan^2 \frac{\alpha}{2}} \quad \cos \alpha = \frac{1 - \tan^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \tan^2 \frac{\alpha}{2}} \quad \tan \alpha = \frac{2 \tan \frac{\alpha}{2}}{1 - \tan^2 \frac{\alpha}{2}}$$

Formule di prostaferesi

$$\sin \alpha \pm \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha \pm \beta}{2} \cos \frac{\alpha \mp \beta}{2} \quad \cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \quad \cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$$

Formule di Werner

$$\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)] \quad \cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)] \quad \sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)]$$

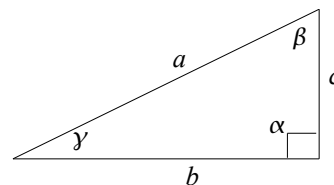
Teoremi sui triangoli

Triangoli rettangoli

$$\begin{aligned} b &= a \sin \beta & c &= a \sin \gamma & b &= c \tan \beta & c &= b \tan \gamma \\ b &= a \cos \gamma & c &= a \cos \beta & b &= c \cot \gamma & c &= b \cot \beta \end{aligned}$$

Teorema di Pitagora

$$a^2 = b^2 + c^2$$



Triangoli qualsiasi

Teorema dei seni

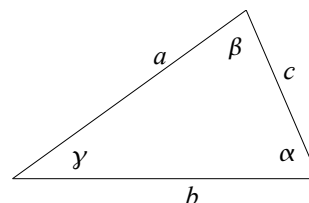
$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2R$$

Teorema delle proiezioni

$$a = b \cos \gamma + c \cos \beta \quad b = c \cos \alpha + a \cos \gamma \quad c = a \cos \beta + b \cos \alpha$$

Teorema del coseno o di Carnot

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha \quad b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cos \beta \quad c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$$



Altro

Sviluppo di Taylor delle funzioni trigonometriche

$$\sin \vartheta = \vartheta - \frac{\vartheta^3}{3!} + \frac{\vartheta^5}{5!} - \dots \quad \cos \vartheta = 1 - \frac{\vartheta^2}{2!} + \frac{\vartheta^4}{4!} - \dots$$

Formule di Eulero (esponenziale complesso)

$$e^{\pm i\vartheta} = \cos \vartheta \pm i \sin \vartheta \quad \sin \vartheta = \frac{e^{i\vartheta} - e^{-i\vartheta}}{2i} \quad \cos \vartheta = \frac{e^{i\vartheta} + e^{-i\vartheta}}{2}$$

Funzioni iperboliche

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \frac{\sin(i\vartheta)}{i} \quad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cos(i\vartheta) \quad \tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

il seno iperbolico è dispari, il coseno iperbolico è pari, la tangente iperbolica è dispari.

Valori delle funzioni trigonometriche di angoli particolari

gradi	radianti	seno	coseno	tangente	cotangente
0°	0	0	1	0	non definita
30°	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$
45°	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1
60°	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
90°	$\frac{\pi}{2}$	1	0	non definita	0
180°	π	0	-1	0	non definita
270°	$\frac{3}{2}\pi$	-1	0	non definita	0
360°	2π	0	1	0	non definita

①

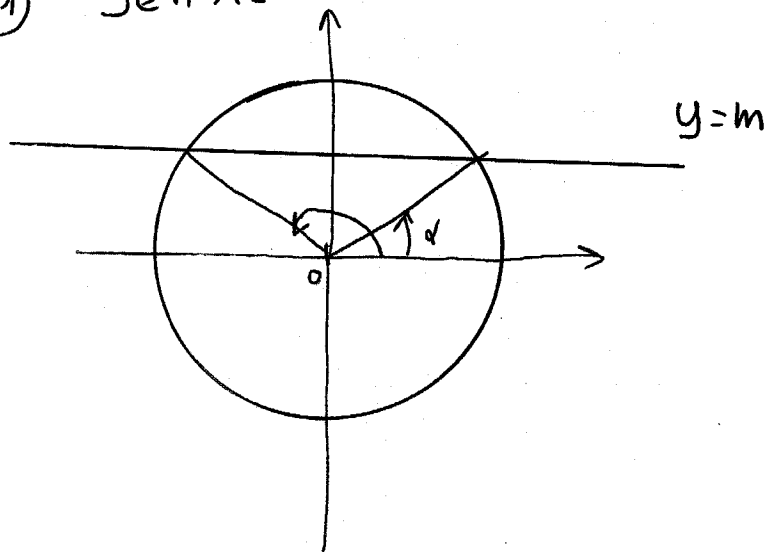
Definizione: Una equazione si dice goniometrica se ci sono funzioni goniometriche nei cui argomenti compaiono incognite.

Equazioni Elementari

Sono del tipo: $\sin x = m$; $\cos x = m$; $\tan x = m$; $\cot x = m$

1) $\sin x = m$

con $-1 \leq m \leq 1$



Se $m: |m| > 1$ l'equazione è impossibile.

E' fondamentale ricordare che il seno lo si stima sempre sull'asse Y mentre il coseno lo si stima sempre sull'asse X.

se d è soluzione $\Rightarrow$ anche $\pi - d$ è soluzione (2)

Ciò

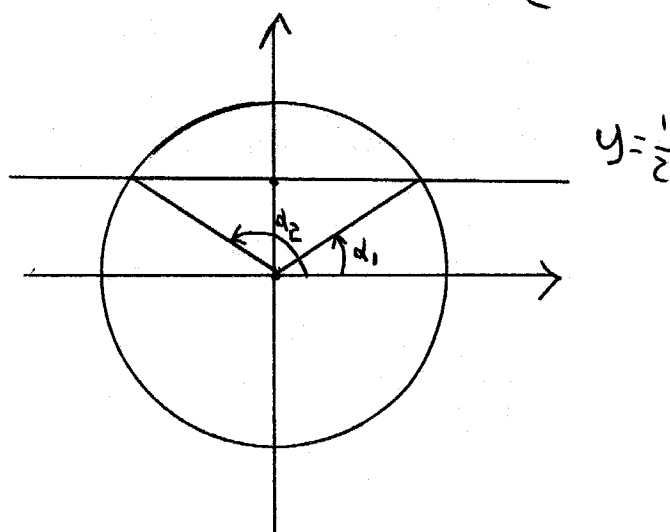
$X_1 = d$ e $X_2 = \pi - d$ sono soluzioni

Inoltre la funzione seno è una funzione periodica
di periodo 2π , per cui

$$X_1 = d + K2\pi \quad \text{e} \quad X_2 = \pi - d + K2\pi$$

Esempio

Risolvere $\sin x = \frac{1}{2}$



Dai valori del seno si osserva che $\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$

$$\text{cioè } \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$X_1 = \frac{\pi}{6} \quad \text{e} \quad X_2 = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{6\pi - \pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$$

Applicando il periodo 2π

3

$$X_1 = \frac{\pi}{6} + K2\pi \quad \text{e} \quad X_2 = \frac{5}{6}\pi + K2\pi$$

Esempio $\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = 1$

Visto che dai valori del seno ^{soltanto} $\sin \frac{\pi}{2} = 1$

possiamo scrivere

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow$$

$$x + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} ; \quad x = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} = \frac{3\pi - \pi}{6} = \frac{2\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$$

$$x = \frac{\pi}{3}$$

aggiungendo la periodicità $x = \frac{\pi}{3} + K2\pi$.

④
Esempio

$$\sin X = -\frac{2}{3}$$

Nelle tabelle dei valori notevoli del seno non vi è il valore $-\frac{2}{3}$ quindi dobbiamo applicare la funzione arcsen ad ambo i membri:

$$\arcsin(\sin X) = \arcsin\left(-\frac{2}{3}\right) \quad ;$$

$$X = \arcsin\left(-\frac{2}{3}\right)$$

Per calcolare tale valore si procede con la calcolatrice scientifica

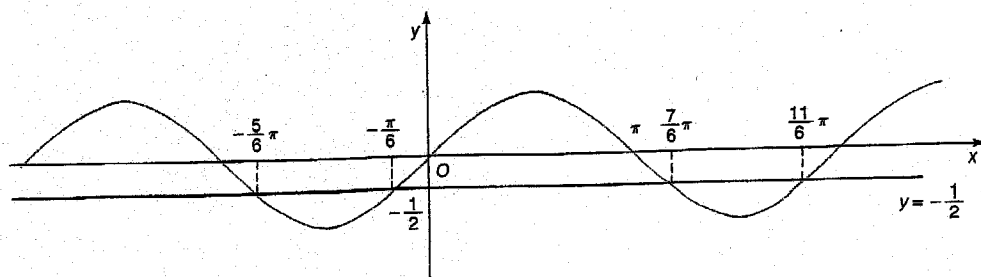
$$X = \arcsin\left(-\frac{2}{3}\right) = -41,81^\circ \Rightarrow$$

$$X_1 = -41,81^\circ \quad \text{e} \quad X_2 = 180 - (-41,81) = 221,81^\circ$$

Quindi le soluzioni sono

$$X_1 = -41,81^\circ + k 360 \quad \text{e} \quad X_2 = 221,81^\circ + k 360^\circ$$

(5)



In modo simile si risolvono:

$$\boxed{\sin hx = m} \quad (1)$$

se d è soluzione $\Rightarrow$ da (1)

$$(2) \quad hx = d + K2\pi \quad e$$

$$hx = \pi - d + K2\pi \quad (3)$$

da (2)

$$x = \frac{d}{h} + K \frac{2\pi}{h}$$

da (3)

$$x = \frac{\pi - d}{h} + K \frac{2\pi}{h}$$

Equazioni del tipo

⑥

$$\operatorname{sen} h x = \operatorname{sen} t x$$

$$1) \quad h x = t x + k 2 \pi \quad \text{e} \quad 2) \quad h x = \pi - t x + k 2 \pi$$

da 1)

$$h x - t x = k 2 \pi$$

$$x(h - t) = k 2 \pi$$

$$x = \frac{k 2 \pi}{h - t}$$

$$\text{da 2)} \quad h x + t x = \pi + k 2 \pi ;$$

$$x(h + t) = \pi + k 2 \pi ; \quad x = \frac{\pi}{h + t} + \frac{k 2 \pi}{h + t}$$

7

Esempio

$$\sin 2x = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Visto che dalle tabelle dei valori del seno

$$\sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{si ha}$$

$$\sin 2x = \sin \frac{\pi}{4} \quad \Rightarrow$$

$$1) \quad 2x = \frac{\pi}{4} + k2\pi ; \quad x = \frac{\pi}{8} + k\pi$$

$$2) \quad 2x = \pi - \frac{\pi}{4} + k2\pi ; \quad x = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{8} + k\pi ;$$

$$x = \frac{4\pi - \pi}{8} + k\pi ; \quad x = \frac{3}{8}\pi + k\pi$$

Esempio

8

$$\operatorname{sen} 5x = \operatorname{sen} 3x$$

$$1) \quad 5x = 3x + k2\pi \quad ; \quad 5x - 3x = k2\pi \quad ;$$

$$2x = k2\pi \quad ; \quad x = k\pi$$

$$2) \quad 5x = \pi - 3x + k2\pi \quad ; \quad 5x + 3x = \pi + k2\pi \quad ;$$

$$8x = \pi + k2\pi \quad ; \quad x = \frac{\pi}{8} + \frac{k2\pi}{8}$$

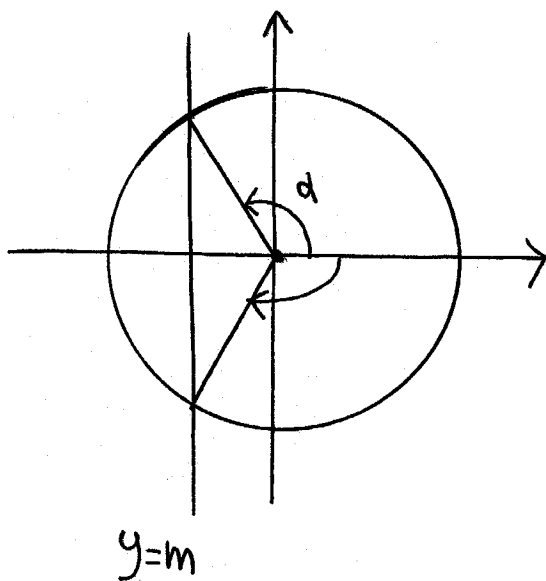
$$x = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{4}$$

Equazioni del tipo

$$\cos x = m$$

9

Osservazione: Ricordiamo che il coseno di un angolo lo si stima sempre sull'asse delle ordinate.

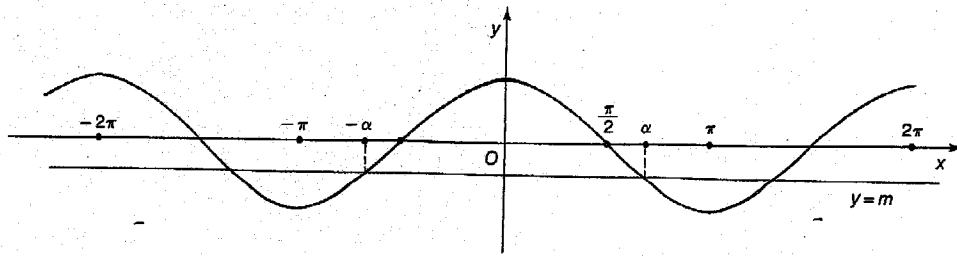


Si osserva dal grafico che se d è soluzione anche $-d$ è soluzione.

Il periodo della funzione coseno è 2π

Per cui

$$1) x = d + k2\pi \quad \text{e} \quad 2) x = -d + k2\pi$$



Esempio $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Dai valori del coseno sappiamo $\cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

da cui

$$\cos x = \cos \frac{\pi}{4}$$

1) $x = \frac{\pi}{4} + k2\pi$

e 2) $x = -\frac{\pi}{4} + k2\pi$

Le riflessioni sulle equazioni del tipo

(11)

$$\cosh x = m \quad \text{e} \quad \cosh x = \cosh Kx$$

sono simili a quelle del seno, con l'importante differenza che il coseno si stima sull'asse delle X e il seno sull'asse delle Y .

Esempio

$$\cos \frac{x}{2} = -\frac{1}{2}$$

Dalle tabelle dei valori del coseno si ha:

$$\cos \frac{2}{3} \pi = -\frac{1}{2}$$

Da cui

$$\cos \frac{x}{2} = \cos \left(\frac{2}{3} \pi \right)$$

$$1) \frac{x}{2} = \frac{2}{3} \pi + K 2\pi ; x = \frac{4}{3} \pi + 2K 2\pi ; x = \frac{4}{3} \pi + K 4\pi$$

$$2) \frac{x}{2} = \left(-\frac{2}{3} \pi \right) + K 2\pi ; x = -\frac{4}{3} \pi + K 4\pi$$

Esempio

$$\cos 7x = \cos \frac{x}{3}$$

$$1) 7x = \frac{x}{3} + K 2\pi ; 7x - \frac{x}{3} = K 2\pi ; x \left(7 - \frac{1}{3} \right) = K 2\pi ;$$

$$x \left(\frac{21-1}{3} \right) = K 2\pi ; \frac{20}{3} x = K 2\pi ; x = \frac{3}{20} K 2\pi ;$$

$$x = \frac{3}{10} K \pi$$

$$2) \quad 7x = -\frac{x}{3} + K2\pi$$

$$7x + \frac{x}{3} = K2\pi; \quad x\left(7 + \frac{1}{3}\right) = K2\pi; \quad x\left(\frac{21+1}{3}\right) = K2\pi;$$

$$x\left(\frac{22}{3}\right) = K2\pi; \quad x = \frac{3}{22} K2\pi; \quad x = \frac{3}{11} K\pi$$

Esempio

$$\cos\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$1) \quad 2x - \frac{\pi}{6} = x + \frac{\pi}{4} + K2\pi;$$

$$2x - x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4} + K2\pi; \quad x = \frac{2\pi + 3\pi}{12} + K2\pi;$$

$$x = \frac{5}{12} \pi + K2\pi$$

$$2) \quad 2x - \frac{\pi}{6} = -x - \frac{\pi}{4} + K2\pi;$$

$$2x + x = \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{4} + K2\pi; \quad 3x = \frac{2\pi - 3\pi}{12} + K2\pi;$$

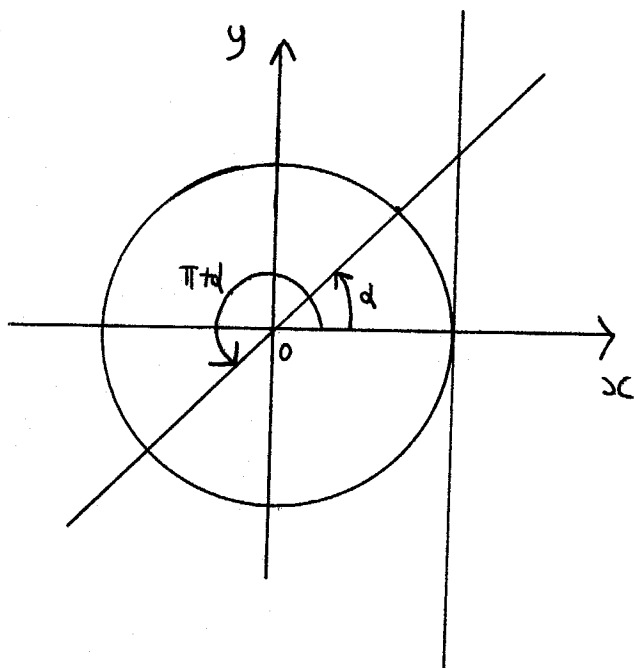
$$3x = -\frac{1}{12} \pi + K2\pi; \quad x = -\frac{1}{36} \pi + \frac{2}{3} K\pi$$

Equazioni del tipo

14

$$\operatorname{tg} x = m$$

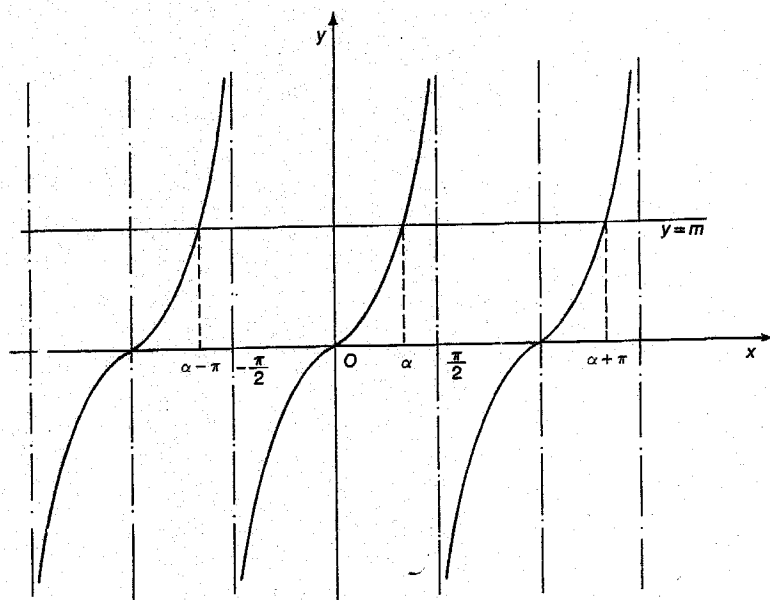
ammette soluzioni $\forall$ valore di m con $m \in]-\infty; +\infty[$



se d è soluzione anche $\pi + d$ è soluzione
Inoltre ricordiamo che la tangente ha periodo $K\pi$. Da cui

$$x_1 = d + 2K\pi \quad \text{e} \quad x_2 = \pi + d + 2K\pi$$

x_2 ha 2 più anche scriviamo mediante x_1 , $x_2 = d + K\pi$
risultando come periodo delle soluzioni π e non 2π



Esempio $\operatorname{tg} x = -\sqrt{3}$

Dalle tabelle dei valori della tangente si ha che

$$\operatorname{tg} \frac{2}{3} \pi = -\sqrt{3} \quad \Rightarrow$$

$$1) \operatorname{tg} x = \operatorname{tg} \frac{2}{3} \pi ; \quad x = \frac{2}{3} \pi + 2k\pi$$

$$2) x = \frac{2}{3} \pi + \pi + 2k\pi ; \quad x = \frac{2\pi + 3\pi}{3} + 2k\pi ; \quad x = \frac{5}{3} \pi + 2k\pi$$

Ma 2) è ricavabile dalla 1)

$$x_2 = \frac{2}{3} + k\pi$$

prendendo il periodo π
e non 2π

Equazioni del tipo:

$$\boxed{\operatorname{tg} hx = m}$$

se d è soluzione, cioè se $\operatorname{tg} d = m$, si ha

$$\operatorname{tg} hx = \operatorname{tg} d$$

$$hx = d + K\pi; \quad x = \frac{d}{h} + \frac{K}{h} \pi$$

Equazioni del tipo

~~$\operatorname{tg} hx = m$~~ $\operatorname{tg} hx = \operatorname{tg} lx$ con $(h, l \in \mathbb{R})$

$$hx = lx + K\pi; \quad hx - lx = K\pi; \quad x(h-l) = K\pi;$$

$$x = \frac{K}{h-l} \cdot \pi$$

Esempio

(17)

$$\text{Eg } 4x = -1$$

Dalla tabella dei valori della tangente si ha

$$\text{Eg } \frac{3}{4} \pi = -1$$

segue che

$$4x = \frac{3}{4} \pi + k\pi; \quad x = \frac{3}{16} \pi + k \frac{\pi}{4}$$

Esempio

$$\text{Eg } x = \text{Eg } \frac{x}{2}$$

$$x = \frac{x}{2} + k\pi; \quad x - \frac{x}{2} = k\pi; \quad x \left(1 - \frac{1}{2}\right) = k\pi;$$

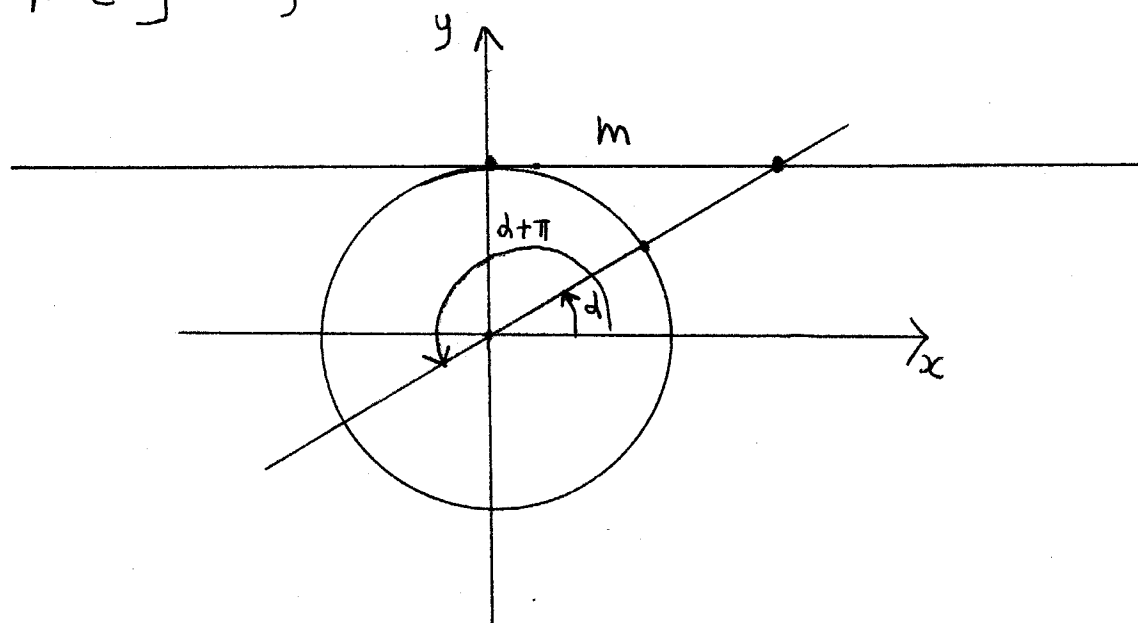
$$x \left(\frac{2-1}{2}\right) = k\pi; \quad x \cdot \frac{1}{2} = k\pi; \quad x = 2k\pi.$$

Equazioni del tipo
 $\operatorname{ctg} x = m$

(18)

ha soluzione qualunque sia il valore di m

$$m \in]-\infty; \infty[$$



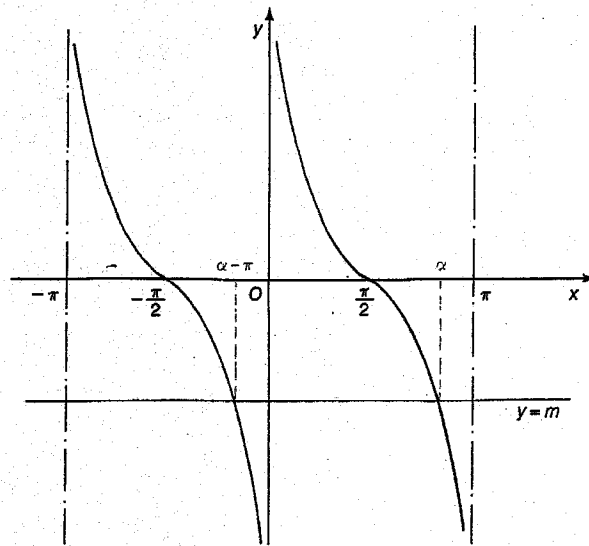
se d è soluzione anche $\pi + d$ è soluzione.

$$x_1 = d + 2k\pi \quad \text{e} \quad x_2 = \pi + d + 2k\pi$$

Le 2 soluzioni si possono sintetizzare con l'unica
soluzione

$$x = d + k\pi \quad \text{risarcendo}$$

il periodo delle cotangente che è $k\pi$



Esempio $\text{ctg } x = +1$

dalle tabelle dei valori delle cotangente si ha che

$$\text{ctg } \frac{\pi}{4} = 1 \quad \text{regue che}$$

$$\text{ctg } x = \text{ctg } \frac{\pi}{4} \quad ; \quad x = \frac{\pi}{4} + K\pi$$

Esempio

$$\operatorname{ctg} \frac{5}{2} x = 0$$

da cui valore di ctg : $\operatorname{ctg} \frac{\pi}{2} = 0 \Rightarrow$

$$\operatorname{ctg} \frac{5}{2} x = \operatorname{ctg} \frac{\pi}{2} ; \quad \frac{5}{2} x = \frac{\pi}{2} + k\pi ;$$

$$x = \frac{2}{5} \frac{\pi}{2} + \frac{2}{5} k\pi ; \quad x = \frac{\pi}{5} + \frac{2}{5} k\pi$$

Esempio

$$\operatorname{ctg} \frac{x}{3} = \operatorname{ctg} \frac{x}{4}$$

$$\frac{x}{3} = \frac{x}{4} + k\pi ; \quad \frac{x}{3} - \frac{x}{4} = k\pi ; \quad x\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) = k\pi$$

$$x\left(\frac{4-3}{12}\right) = k\pi ; \quad x\left(\frac{1}{12}\right) = k\pi ; \quad x = 12k\pi$$

Le funzioni inverse delle funzioni trigonometriche (21)

Quando un valore di funzione trigonometrica non è presente nelle tabelle dei valori noti: si deve ricorrere alle funzioni inverse.

$\arcsin$

$\arccos$

$\arctg$

$\operatorname{arccotg}$

il valore x determinando utilizzando la calcolatrice.

Equazioni Riducibili a Elementari

22

Esempio

$$\sin^2 x + \sin x - 2 = 0$$

$$\sin x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4(1)(-2)}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2} = \begin{cases} \frac{-1-3}{2} = -2 \\ \frac{-1+3}{2} = 1 \end{cases}$$

La soluzione $\sin x = -2$ è da scartare

$$\sin x = 1 \Rightarrow$$

$$\sin x = \sin \frac{\pi}{2}; \quad x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

Esempio

$$\sqrt{2} \sin x \cos x + \cos x = 0$$

$$\cos x (\sqrt{2} \sin x + 1) = 0$$

1° fattore

$$\cos x = 0;$$

$$\cos x = \cos \frac{\pi}{2};$$

$$\boxed{x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi}$$

$$2) \quad x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

2° fattore

23

$$\sqrt{2} \cos x + 1 = 0; \quad \sqrt{2} \cos x = -1;$$

$$\cos x = -\frac{1}{\sqrt{2}}; \quad \cos x = \frac{-\sqrt{2}}{\sqrt{2} \sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Stesse tabelle del seno e che

$$1) \quad \cos \frac{5}{4} \pi = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow$$

$$\cos x = \cos \frac{5}{4} \pi; \quad x = \frac{5}{4} \pi + 2k\pi$$

2) se $\frac{5}{4} \pi$ è soluzione, anche $\pi - \frac{5}{4} \pi$ è
soluzione

$$\cos x = \cos \left(\pi - \frac{5}{4} \pi \right);$$

$$\cos x = \cos \left(\frac{4\pi - 5\pi}{4} \right);$$

$$\cos x = \cos \left(-\frac{\pi}{4} \pi \right);$$

$$x = -\frac{\pi}{4} \pi + 2k\pi \quad \text{e non vogliamo derivarlo}$$

mediante un angolo negativo, basta calcolare il
complementare a 2π

$$-\frac{\pi}{4} = 2\pi - \frac{\pi}{4} = \frac{8\pi - \pi}{4} = \frac{7}{4}\pi$$

Da cui la 2^a famiglia delle soluzioni è

$$X = \frac{7}{4} + 2k\pi$$

la 1^a famiglia era rappresentata da

$$X = \frac{5}{4}\pi + 2k\pi$$

Esempio

25

$$\sin\left(\frac{2}{3}x - \frac{\pi}{5}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

poniamo $\frac{2}{3}x - \frac{\pi}{5} = t$

$$\sin t = \sin \frac{\sqrt{3}}{2}$$

dalle tabelle del valore del seno si ha
che:

$$\sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{da cui}$$

$$\sin t = \sin \frac{\pi}{3} ; \quad t = \frac{\pi}{3} + 2\pi k \quad \text{vale}$$

$$\frac{2}{3}x - \frac{\pi}{5} = \frac{\pi}{3} + 2\pi k ;$$

$$\frac{2}{3}x = \frac{\pi}{5} + \frac{\pi}{3} + 2\pi k ; \quad \frac{2}{3}x = \frac{3\pi + 5\pi}{15} + 2\pi k ;$$

$$\frac{2}{3}x = \frac{8\pi}{15} + 2\pi k ; \quad x = \frac{8\pi}{15} \cdot \frac{3}{2} + \frac{3}{2} 2\pi k$$

$$x = \frac{4}{5}\pi + 3k\pi$$

~~Q20~~ Trovare le equazioni che contengono

il seno rappresentando che se α è soluzione anche $\pi - \alpha$ è soluzione.

Quindi anche $\pi - \frac{\pi}{3}$ è soluzione

$$t = \pi - \frac{\pi}{3} + 2\pi k \quad \text{cioè}$$

$$\frac{2}{3}x - \frac{\pi}{5} = \pi - \frac{\pi}{3} + 2\pi k$$

$$\frac{2}{3}x = \frac{\pi}{5} + \pi - \frac{\pi}{3} + 2\pi k ;$$

$$\frac{2}{3}x = \frac{3\pi + 15\pi - 5\pi}{15} + 2\pi k ;$$

$$\frac{2}{3}x = \frac{13\pi}{15} + 2\pi k ;$$

$$x = \frac{\cancel{3}}{2} \cdot \frac{13}{\cancel{15}_5} \pi + \frac{3}{\cancel{2}} \pi k ;$$

$$x = \frac{13}{10} \pi + 3\pi k$$

Equazioni Lineari in $\sin x$ e $\cos x$ (27)

$$a \sin x + b \cos x + c = 0 \quad (1)$$

se a e/o b sono uguali a 0, si ricade nelle equazioni elementari, altrimenti si inseriscono le seguenti sostituzioni

$$\sin x = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} \quad \text{e} \quad \cos x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} \quad (2)$$

Le (2) valgono $\forall x$ ma con $x \neq \pi + 2k\pi$

OSSERVAZIONE: Le funzioni $\sin x$ e $\cos x$ sono funzioni ovunque definite mentre la tangente nelle formule (2) per $x = \pi + k2\pi$ non è definita in quanto la tg non esiste per $\alpha = \frac{\pi}{2}$ e $\alpha = \frac{3}{2}$.

Di conseguenza si deve provare nelle (1) se $x = \pi + k2\pi$ è soluzione.

Se lo è, tale soluzione le si deve aggiungere
a quelle trovate sostituendo le (2) in (1). (28)

~

Quindi si deve verificare che

$$a \sin(\pi + 2k\pi) + b \cos(\pi + 2k\pi) + c = 0$$

~

Sostituendo le (2) in (1) si ha

$$a \cdot \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} + b \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} + c = 0$$

$$\frac{a \cdot 2 \operatorname{tg} \frac{x}{2} + b(1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}) + c(1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2})}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} = \frac{0}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}$$

$$2a \cdot \operatorname{tg} \frac{x}{2} + b - b \cdot \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} + c + c \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} = 0$$

$$\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} (c - b) + 2a \cdot \operatorname{tg} \frac{x}{2} + (b + c) = 0$$

a questo punto si risolve l'equazione come una
equazione di 2 grado.

Esempio

(29)

$$\sin x - \cos x - 1 = 0 \quad (1)$$

Verifichiamo se $x = \pi + k2\pi$ è o non è soluzione

$$\sin(\pi + k2\pi) - \cos(\pi + k2\pi) - 1 = 0$$

$$0 - (-1) - 1 = 0; \quad 1 - 1 = 0; \quad 0 = 0 \Rightarrow$$

$x = \pi + k2\pi$ è soluzione

Adesso sostituiamo

$$2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}$$

$$\sin x = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}$$

$$1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}$$

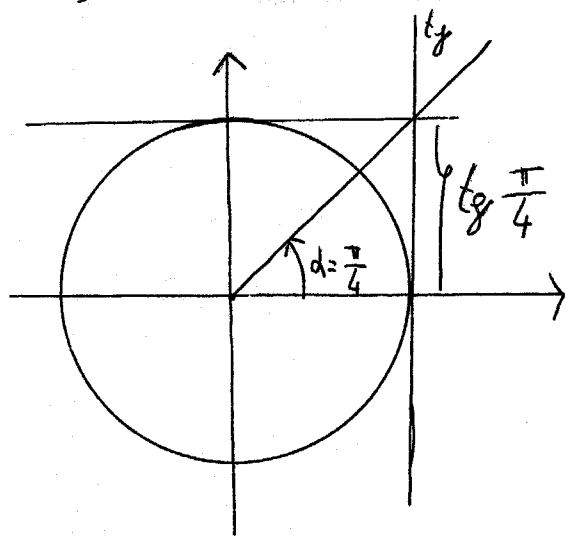
$$\cos x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}$$

$$\frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} - \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} - 1 = 0$$

$$\frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2} - \left(1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}\right) - \left(1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}\right)}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} = \frac{0}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}$$

$$2 \cancel{\text{tg}} \frac{x}{2} - 1 + \cancel{\text{tg}} \frac{x}{2} - 1 - \cancel{\text{tg}} \frac{x}{2} = 0$$

$$2 \text{tg} \frac{x}{2} - 2 = 0 ; \text{tg} \frac{x}{2} - 1 = 0 ; \text{tg} \frac{x}{2} = 1$$



dalle tabelle della tangente si ha che

$$\text{tg} \frac{\pi}{4} = 1 \quad \text{refine che}$$

$$\text{tg} \frac{x}{2} = \text{tg} \left(\frac{\pi}{4} + K\pi \right) ; \quad \frac{x}{2} = \frac{\pi}{4} + K\pi ;$$

$$x = \cancel{\frac{\pi}{2}} + 2K\pi ; \quad \boxed{x = \frac{\pi}{2} + 2K\pi}$$

In definitiva le soluzioni sono

$$x = \pi + 2K\pi \quad \text{e} \quad x = \frac{\pi}{2} + 2K\pi.$$

Esercizio

31

$$\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) + \sqrt{3} \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) - \sqrt{3} = 0 \quad (1)$$

poniamo $2x - \frac{\pi}{3} = t$

$$\sin(t) + \sqrt{3} \cos(t) - \sqrt{3} = 0$$

Verifichiamo se $x = \pi + k2\pi$ è soluzione:

$$\sin(\pi + k2\pi) + \sqrt{3} \cos(\pi + k2\pi) - \sqrt{3} = 0$$

$$0 + \sqrt{3}(-1) - \sqrt{3} = 0; \quad \sqrt{3} - \sqrt{3} \neq 0! \quad \text{quindi}$$

$x = \pi + 2k\pi$ Non sono soluzioni.

applichiamo alla (1) le parametriche

$$\frac{2 \operatorname{tg} \frac{t}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{t}{2}} + \sqrt{3} \cdot \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{t}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{t}{2}} - \sqrt{3} = 0$$

$\Rightarrow$

$$2 \operatorname{tg} \frac{t}{2} + \sqrt{3} \left(1 - \operatorname{tg}^2 \frac{t}{2}\right) - \sqrt{3} \left(1 + \operatorname{tg}^2 \frac{t}{2}\right) = 0$$

$$2 \operatorname{tg} \frac{t}{2} + \cancel{\sqrt{3}} - \sqrt{3} \operatorname{tg}^2 \frac{t}{2} - \cancel{\sqrt{3}} - \sqrt{3} \operatorname{tg}^2 \frac{t}{2} = 0$$

$$\operatorname{tg}^2 \frac{t}{2} (-\sqrt{3} - \sqrt{3}) + \operatorname{tg} \frac{t}{2} (2) + \cancel{\sqrt{3}} = 0$$

$$-2\sqrt{3} \operatorname{tg}^2 \frac{t}{2} + 2 \operatorname{tg} \frac{t}{2} = 0;$$

$$\sqrt{3} \operatorname{tg}^2 \frac{t}{2} - \operatorname{tg} \frac{t}{2} = 0;$$

$$\operatorname{tg} \frac{t}{2} (\sqrt{3} \operatorname{tg} \frac{t}{2} - 1) = 0$$

$$1^{\circ} \quad \operatorname{tg} \frac{t}{2} = 0; \text{ recordando que } \operatorname{tg} 0 = 0;$$

$$\operatorname{tg} \frac{t}{2} = \operatorname{tg}(0 + k\pi); \quad \frac{t}{2} = k\pi; \quad \boxed{t = 2k\pi}$$

$$2^{\circ} \quad \sqrt{3} \operatorname{tg} \frac{t}{2} - 1 = 0; \quad \operatorname{tg} \frac{t}{2} = \frac{1}{\sqrt{3}};$$

$$\operatorname{tg} \frac{t}{2} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} ; \operatorname{tg} \frac{t}{2} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

sapendo che $\operatorname{tg} \frac{t}{2} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ e $\operatorname{tg} \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ si ha:

$$\operatorname{tg} \frac{t}{2} = \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{6} + k\pi \right); \quad \frac{t}{2} = \frac{\pi}{6} + k\pi ;$$

$$t = \cancel{2} \cdot \frac{\pi}{\cancel{6}} + 2k\pi ; \quad t = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$$

In definitiva abbiamo trovato le 2 famiglie di soluzioni sono:

$$1) \quad t = 2k\pi$$

$$2) \quad t = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$$

$$\text{con } t = 2x - \frac{\pi}{3}$$

Dalla 1) si ha:

$$2x - \frac{\pi}{3} = 2k\pi ; \quad 2x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi ; \quad \boxed{x = \frac{\pi}{6} + k\pi} \quad (3)$$

Dalla 2) si ha

$$2x - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{3} + 2k\pi ; \quad 2x = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3} + 2k\pi ;$$

$$2x = 2 \cdot \frac{\pi}{3} + 2k\pi ; \quad \boxed{x = \frac{\pi}{3} + k\pi} \quad (4)$$

Le (3) e le (4) rappresentano le famiglie delle soluzioni.

L'osservazione, come risulta evidente, si potrebbe risolvere sviluppando le tracce con le formule di sottrazione e duplicazione, ma solitamente tale procedura è molto più laboriosa. In genere, anche se non sempre, utilizzare la tecnica delle sostituzioni è ottimale sia per lunghezza sia per complessità delle procedure.

Risoluzione grafica delle equazioni lineari.

Supponiamo di avere l'equazione lineare

$$a \sin x + b \cos x + c = 0 \quad (1)$$

In precedenza, avevamo sottolineato, che, il seno lo stimiamo sempre sull'asse delle Y e il seno sull'asse delle X .

Per cui, poniamo:

$$\cos x = X \quad \text{e} \quad \sin x = Y$$

Sotto tali condizioni la (1) equivale al sistema

$$(2) \begin{cases} aY + bX + c = 0 \\ X^2 + Y^2 = 1 \end{cases}$$

L'equazione $X^2 + Y^2 = 1$ è la relazione fondamentale della geometria

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1.$$

Esempio

36

Risolvere: $\cos x + \sin x - 1 = 0$ (1)

Poniamo $\cos x = X$ e $\sin x = Y$

$$\begin{cases} X + Y - 1 = 0 \\ X^2 + Y^2 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} X = 1 - Y \\ (1 - Y)^2 + Y^2 = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} X = 1 - Y \\ 1 + Y^2 - 2Y + Y^2 - 1 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} X = 1 - Y \\ 2Y^2 - 2Y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} X = 1 - Y \\ Y^2 - Y = 0 \end{cases}$$

$$Y(Y - 1) = 0$$

$$\boxed{Y = 0} \text{ 1}^{\text{a}} \text{ sol.}$$

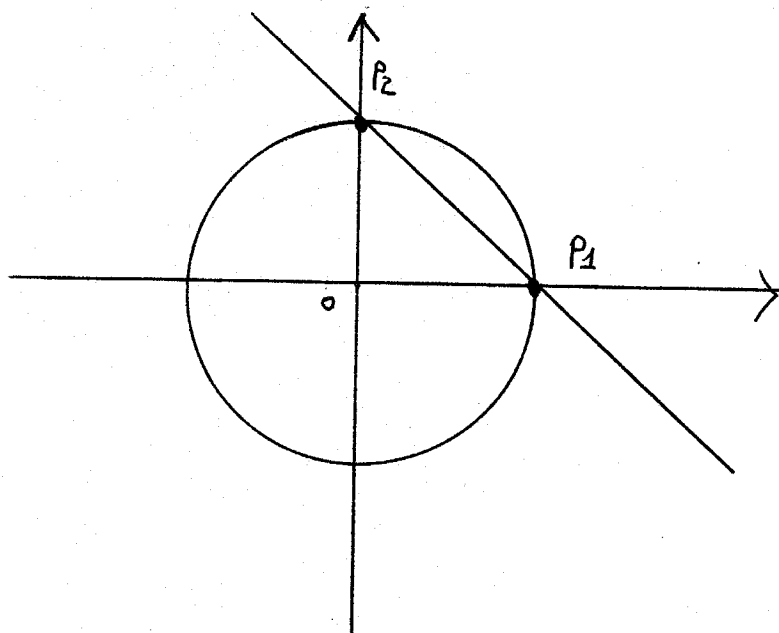
$$Y - 1 = 0; \quad \boxed{Y = 1} \text{ 2}^{\text{a}} \text{ soluzione}$$

Da $Y = 0$ si ha: $X = 1 - Y; X = 1 - 0; \boxed{X = 1}$ Da cui

$$P_1(1; 0)$$

Da $Y=1$ si ha
 $X=1-Y$; $X=1-1$; $\boxed{X=0}$ Da cui

$$P_2(0;1)$$



Determiniamo gli angoli rispetto ai quali si osservano le soluzioni

$$1) x_1 = 0 + K2\pi$$

$$2) x_2 = \frac{\pi}{2} + K2\pi$$

Cioè

$$x_1 = K2\pi \quad e \quad x_2 = \frac{\pi}{2} + K2\pi$$

E tali sono le soluzioni di (1).

Esercizio

(38)

$$(\sqrt{3} + 2) \cos X + \sin X + 1 = 0 \quad (1)$$

Poniamo

$$\cos X = X \quad \text{e} \quad \sin X = Y$$

Studiare la (1) equivale a studiare il sistema

$$\begin{cases} (\sqrt{3} + 2)X + Y + 1 = 0 \\ X^2 + Y^2 = 1 \end{cases}$$

Ricaviamo Y dall'equazione lineare:

$$Y = -1 - (\sqrt{3} + 2)X; \quad Y = -1 - \sqrt{3}X - 2X$$

per cui

$$X^2 + (-1 - \sqrt{3}X - 2X)^2 = 1; \quad ;$$

$$X^2 + \cancel{1} + 3X^2 + 4X^2 + 2\sqrt{3}X + 4X + \cancel{1}\sqrt{3}X^2 - \cancel{1} = 0$$

$$X^2(1+3+4+\cancel{1}\sqrt{3}) + X(2\sqrt{3}+4) = 0$$

$$X^2(8+\cancel{1}\sqrt{3}) + X(2\sqrt{3}+4) = 0$$

$$X \left[(8+\cancel{1}\sqrt{3})X + (4+2\sqrt{3}) \right] = 0$$

1^a Soluzione $X=0$

2^a Soluzione

$$(8+\cancel{1}\sqrt{3})X + (4+2\sqrt{3}) = 0;$$

Dividiamo i coefficienti per 2

$$(4+2\sqrt{3})X + (2+\sqrt{3}) = 0; \quad (4+2\sqrt{3})X = -(2+\sqrt{3});$$

$$X = -\frac{1}{2}$$

Sostituiamo $X=0$ nell'equazione lineare

$$(\sqrt{3}+2) \cdot 0 + Y+1=0; \quad Y+1=0; \quad Y=-1$$

$$P_1(0; -1)$$

Postituiamo

40

$x = -\frac{1}{2}$ nell'equazione lineare

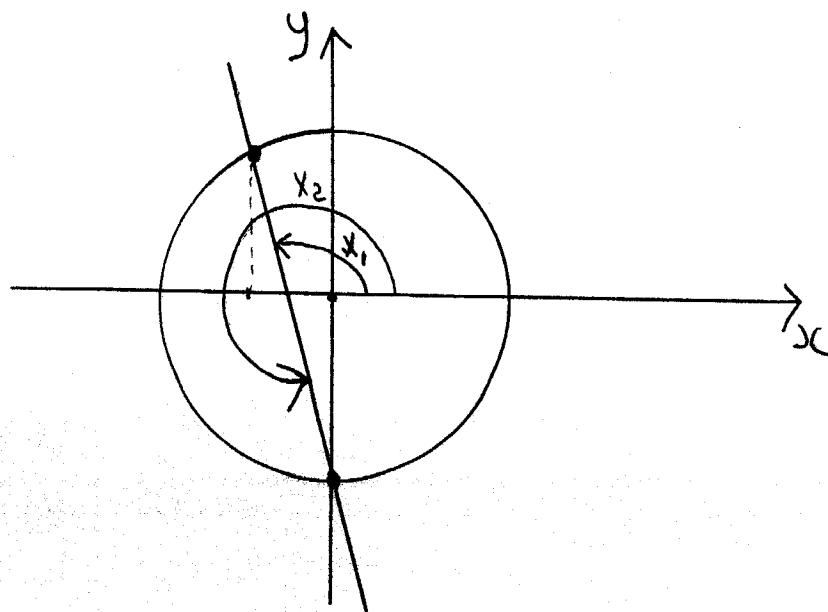
$$(\sqrt{3} + 2)\left(-\frac{1}{2}\right) + Y + 1 = 0;$$

$$-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{x}{2} + Y + 1 = 0; -\frac{\sqrt{3}}{2} - \cancel{1} + \cancel{1} + Y = 0$$

$$-\frac{\sqrt{3}}{2} + Y = 0; Y = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$P_2\left(-\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

In definitiva i punti di intersezione sono
 $P_1(0; -1)$ e $P_2\left(-\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$



Per determinare il valore di X_1
si deve cercare il valore di un angolo nel secondo
quadrante che ha valore di coseno $-\frac{1}{2}$ e/o
valore del seno $\frac{\sqrt{3}}{2}$

Dalle tabelle si ha che

$$X_1 = \frac{2}{3} \pi + K 2\pi$$

e
$$X_2 = \frac{3}{2} \pi + K 2\pi$$

se nelle tabelle non si sono i valori cercati
li troveremo con le calcolatrice con le funzioni
arccos e arcsen.

X_1 e X_2 sono le 2 famiglie di soluzioni
cercate.

Interpretazione grafica delle Soluzioni delle equazioni lineari.

(42)

Dato $a \sin x + b \cos x + c = 0$ (1)

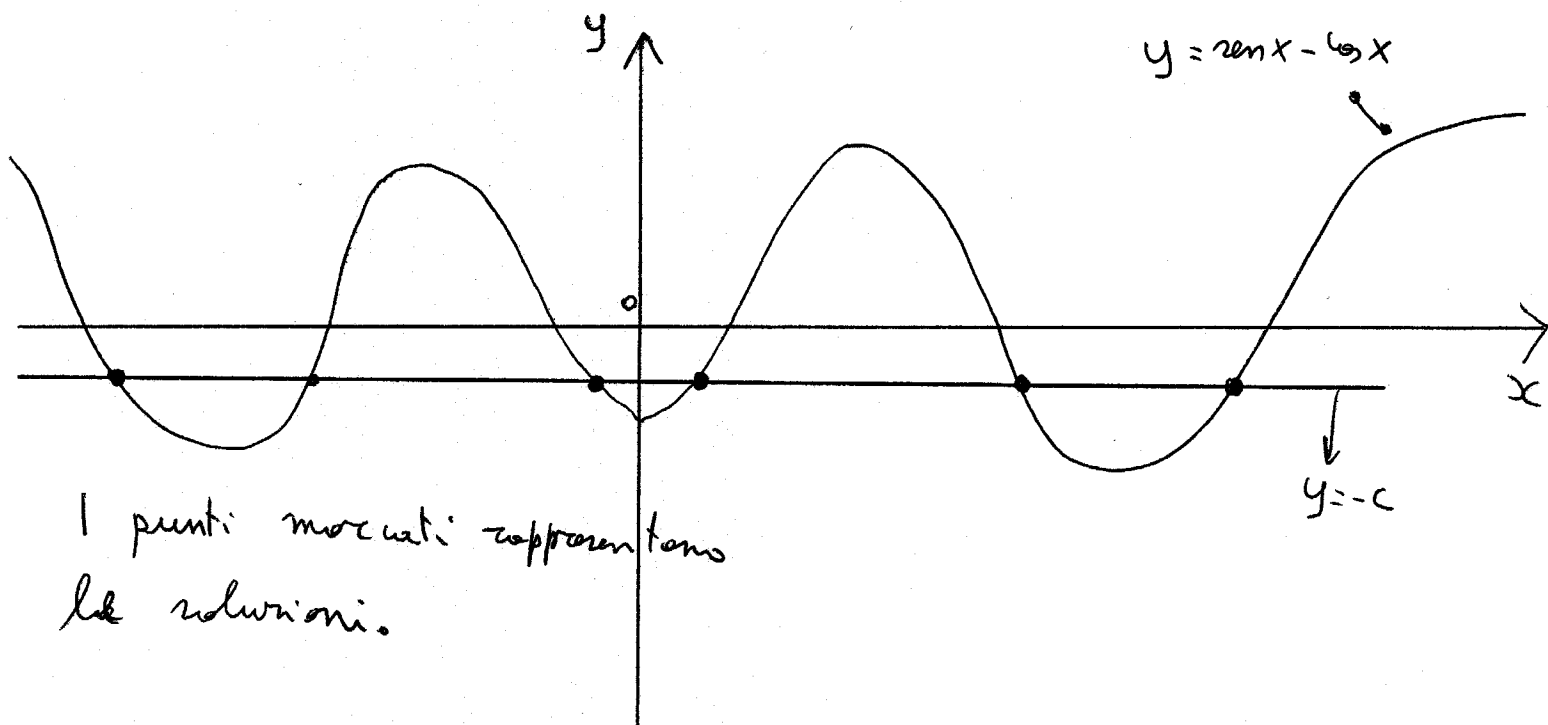
$$a \sin x + b \cos x = -c \quad (2)$$

Le scriviamo nelle forme di 2 funzioni:

$$(3) \begin{cases} y = a \sin x + b \cos x \\ y = -c \end{cases}$$

Le soluzioni di (1) sono le intersezioni di (3)

Si deve tracciare nello stesso grafico, anche per l'interpolazione di punti, le 2 curve



Equazioni Omogenee in $\sin x$ e $\cos x$

(43)

Un'equazione è omogenea in $\sin x$ e $\cos x$ se tutti i suoi termini hanno lo stesso grado.

Esempi:

1) $a \sin x + b \cos x = 0$

2) $a \sin^2 x + b \sin x \cos x + c \cos^2 x = 0$

3) $a \sin^3 x + b \sin^2 x \cos x + c \sin x \cos^2 x + d \cos^3 x = 0$

ecc.

Consigli per risolvere una equazione omogenea:

1) Se nell'equazione c'è il termine di grado massimo $\sin^n x$ si divide tutta l'equazione per $\cos^n x$ (in questo caso $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ non sono soluzioni) e si ottiene una equazione in $\tan x$.

2) Se nell'equazione il grado massimo è rappresentato da $\cos^n x$ si divide tutta l'equazione per $\sin^n x$ (in questo caso $x = k\pi$ non sono soluzioni) e si ottiene una equazione in $\cot x$.

3) Se nell'equazione il grado massimo non è rappresentato né da $\cos^2 x$ né da $\sin x$ si vedrà di effettuare opportuni raccoglimenti.

Esempio

$$\sin^2 x + (1 - \sqrt{3}) \sin x \cos x - \sqrt{3} \cos^2 x = 0 \quad (1)$$

Nell'equazione c'è sia $\sin^2 x$ sia $\cos^2 x \Rightarrow$ che non sono ammesse le soluzioni del tipo:

$$1) x = \frac{\pi}{2} + k\pi$$

$$2) x = k\pi$$

dividiamo le (1) per $\cos^2 x$

$$\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} + (1 - \sqrt{3}) \frac{\sin x \cancel{\cos x}}{\cos^2 x} - \sqrt{3} \frac{\cancel{\cos^2 x}}{\cancel{\cos^2 x}} = 0$$

$$\tan^2 x + (1 - \sqrt{3}) \tan x - \sqrt{3} = 0 \quad (2)$$

$$\begin{aligned}
 t_{g^x} &= \frac{-(1-\sqrt{3}) \pm \sqrt{(1-\sqrt{3})^2 - 4(1)(-\sqrt{3})}}{2} = \\
 &= \frac{-1+\sqrt{3} \pm \sqrt{1+3-2\sqrt{3}+4\sqrt{3}}}{2} = \\
 &= \frac{-1+\sqrt{3} \pm \sqrt{4+2\sqrt{3}}}{2} \quad (4)
 \end{aligned}$$

lavoriamo ~~no~~ con il radicale doppio

$$(5) \sqrt{A \pm \sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A + \sqrt{A^2 - B}}{2}} \pm \sqrt{\frac{A - \sqrt{A^2 - B}}{2}}$$

$$\sqrt{4 + \sqrt{12}} = \sqrt{\frac{4 + \sqrt{16 - 12}}{2}} \pm \sqrt{\frac{4 - \sqrt{16 - 12}}{2}} =$$

$$= \sqrt{\frac{4+2}{2}} \pm \sqrt{\frac{4-2}{2}} = \sqrt{3} + 1$$

torzioni alle (4)

(46)

$$= \frac{-1 + \sqrt{3} \pm (\sqrt{3} + 1)}{2} = \begin{cases} \frac{-1 + \sqrt{3} + \sqrt{3} + 1}{2} = \frac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} \\ \frac{-1 + \sqrt{3} - \sqrt{3} - 1}{2} = -\frac{2}{2} = -1 \end{cases}$$

due cui

$$1^a \boxed{\operatorname{tg} x = -1}$$

$$\text{e } 2^a \boxed{\operatorname{tg} x = \sqrt{3}}$$

$$1^a \operatorname{tg} x = -1; \operatorname{tg} x = \operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{4}\right); \boxed{x = -\frac{\pi}{4} + k\pi} 1^a$$

$$2^a \operatorname{tg} x = \sqrt{3}; \operatorname{tg} x = \operatorname{tg} \frac{\pi}{3}; \boxed{x = \frac{\pi}{3} + k\pi} 2^a$$

$$x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \quad \text{e} \quad x = \frac{\pi}{3} + k\pi \quad \text{sono le}$$

2 famiglie di soluzioni cercate.

Esercizio

(47)

$$\sin x \cos x + \cos^2 x = 0 \quad (1)$$

Nell'equazione (1) c'è il termine $\cos^2 x \Rightarrow$

$x = k\pi$ non è soluzione.

Dividiamo per $\sin^2 x$

$$\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} + \frac{\cancel{\sin x} \cos x}{\cancel{\sin x} \sin x} = 0$$

$$\cot^2 x + \cot x = 0$$

$$\cot x (\cot x + 1) = 0; \quad \cot x = 0 \quad \text{e} \quad \cot x = -1$$

da $\cot x = 0$ si ha

$$x = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad (2)$$

mentre da $\cot x = -1$; $\cot x = \cot\left(-\frac{\pi}{4}\right)$;

$$x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \quad (3)$$

(2) e (3) sono le famiglie di soluzioni cercate.

Esercizio

$$\sin x \cos^2 x - \sqrt{3} \sin^2 x \cos x = 0 \quad (1)$$

Mettiamo $\sin x \cos x$ in evidenza

$$\sin x \cos x (\cos x - \sqrt{3} \sin x) = 0$$

Per la legge dell'annullamento del prodotto

$$a \cdot b = 0 \Leftrightarrow a = 0 \vee b = 0$$

1° Fattore = 0

$$\sin x \cos x = 0 \Rightarrow \begin{array}{l} 1) \cos x = 0 \\ 2) \sin x = 0 \end{array}$$

2° Fattore = 0

$$\cos x - \sqrt{3} \sin x = 0 \quad (3)$$

Risolviemo la 1) $\cos x = 0$

$$\boxed{x = \frac{\pi}{2} + K\pi} \quad (4)$$

Risolviemo la 2) $\sin x = 0$

$$\boxed{x = K\pi} \quad (5)$$

Risolviemo le (3)

(49)

$$\cos x - \sqrt{3} \sin x = 0$$

dividiamo per $\cos x$

$$\frac{1}{\cancel{\cos x}} - \sqrt{3} \frac{\sin x}{\cos x} = 0$$

$$1 - \sqrt{3} \operatorname{tg} x = 0; \quad 1 = \sqrt{3} \operatorname{tg} x; \quad \operatorname{tg} x = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3} \sqrt{3}}; \quad \operatorname{tg} x = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Dalle tabelle dei valori della tangente si ha:

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sqrt{3}}{3} \quad \text{e} \quad \boxed{x = \frac{\pi}{6} + k\pi} \quad (6)$$

Le famiglie (4), (5) e (6) sono le soluzioni di (1).

L'equazione (1) la si potrebbe risolvere in altro modo

$$(1) \sin x \cos^2 x - \sqrt{3} \sin^2 x \cos x = 0$$

è di 3° grado, dividiamo tutto per $\cos^3 x$ ricordando che se dividiamo per $\cos^3 x$ $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$

$$\frac{\sin x \cancel{\cos^2 x}}{\cos^3 x} - \frac{\sqrt{3} \sin^2 x \cancel{\cos x}}{\cos^3 x} = 0$$

$$\operatorname{tg} x - \sqrt{3} \operatorname{tg}^2 x = 0;$$

$$\sqrt{3} \operatorname{tg}^2 x - \operatorname{tg} x = 0;$$

$$\operatorname{tg} x (\sqrt{3} \operatorname{tg} x - 1) = 0$$

$$1) \operatorname{tg} x = 0$$

$$2) \sqrt{3} \operatorname{tg} x - 1 = 0$$

Risoliamo la 1) $\operatorname{tg} x = 0$

$$x = k\pi$$

Risoliamo la 2) $\sqrt{3} \operatorname{tg} x = 1; \operatorname{tg} x = \frac{1}{\sqrt{3}};$

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sqrt{3}}{3}; x = \frac{\pi}{6} + k\pi$$

Con tale procedura non si stimano le eventuali soluzioni $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$

e quindi se si utilizza tale tecnica si deve

verificare se $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ sono o no soluzioni.

Tale procedura è semplice in quanto basta sostituire $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ nella traccia.

Equazioni Riconducibili a Omogenee

Equazioni del tipo

$$a \sin^2 x + b \sin x \cos x + c \cos^2 x + d = 0 \quad (1)$$

non è omogenea, ma facilmente può essere trasformata in omogenea moltiplicando per la relazione fondamentale

$$1 = \cos^2 x + \sin^2 x \quad \text{il termine d.}$$

Esempio

$$(3 + \sqrt{3}) \sin^2 x + 2 \cos^2 x + (\sqrt{3} - 1) \sin x \cos x - 3 = 0 \quad (2)$$

Per renderla omogenea basta moltiplicare il -3 per la relazione fondamentale.

$$(3 + \sqrt{3}) \sin^2 x + 2 \cos^2 x + (\sqrt{3} - 1) \sin x \cos x - 3(\cos^2 x + \sin^2 x) = 0 \quad (3)$$

$$(3 + \sqrt{3}) \sin^2 x + 2 \cos^2 x + (\sqrt{3} - 1) \sin x \cos x - 3 \cos^2 x - 3 \sin^2 x = 0$$

$$[3 + \sqrt{3} - 3] \sin^2 x + [2 - 3] \cos^2 x + (\sqrt{3} - 1) \sin x \cos x = 0$$

$$\sqrt{3} \sin^2 x - \cos^2 x + (\sqrt{3} - 1) \sin x \cos x = 0$$

Dividiamo per $\cos^2 x$

(52)

$$\frac{\sqrt{3} \tan^2 x}{\cos^2 x} + (\sqrt{3} - 1) \frac{\tan x \cancel{\cos x}}{\cos^2 x} - \frac{\cancel{1} \cancel{\cos^2 x}}{\cancel{\cos^2 x}} = 0$$

$$\sqrt{3} \tan^2 x + (\sqrt{3} - 1) \tan x - 1 = 0 \quad (4)$$

Avendo diviso, per tecnica di calcolo, per $\cos^2 x$,

non si potrebbe stimare se $X = \frac{\pi}{2} + k\pi$ è o no soluzione.

Per capire ciò, successivamente, si sostituirà nelle
tracce o nei passaggi successivi, ma prima della
divisione per $\cos^2 x$.

$$\begin{aligned} \tan x &= \frac{-(\sqrt{3} - 1) \pm \sqrt{(\sqrt{3} - 1)^2 - 4(\sqrt{3})(-1)}}{2\sqrt{3}} = \\ &= \frac{-(\sqrt{3} - 1) \pm \sqrt{3 + 1 - 2\sqrt{3} + 4\sqrt{3}}}{2\sqrt{3}} = \end{aligned}$$

$$= \frac{1 - \sqrt{3} \pm \sqrt{3+1 + 2\sqrt{3}}}{2\sqrt{3}} =$$

$$= \frac{1 - \sqrt{3} \pm \sqrt{4+2\sqrt{3}}}{2\sqrt{3}} = \frac{1 - \sqrt{3} \pm \sqrt{4 + \sqrt{12}}}{2\sqrt{3}} = \quad (5)$$

Studiamo il radicale doppio $\sqrt{4 + \sqrt{12}}$

$$\sqrt{A \pm \sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A + \sqrt{A^2 - B}}{2}} \pm \sqrt{\frac{A - \sqrt{A^2 - B}}{2}}$$

$$\sqrt{4 + \sqrt{12}} = \cancel{\sqrt{16}} = \sqrt{\frac{4 + \sqrt{16 - 12}}{2}} + \sqrt{\frac{4 - \sqrt{16 - 12}}{2}} =$$

$$= \sqrt{\frac{4 + 2}{2}} + \sqrt{\frac{4 - 2}{2}} = \sqrt{3} + 1$$

da (5)

$$= \frac{1 - \sqrt{3} \pm (\sqrt{3} + 1)}{2\sqrt{3}} =$$

$$= \begin{cases} \frac{1 - \cancel{\sqrt{3}} + \cancel{\sqrt{3}} + 1}{2\sqrt{3}} = \frac{\cancel{x}}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{\cancel{1} - \sqrt{3} - \sqrt{3} - \cancel{1}}{2\sqrt{3}} = \frac{-2\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = -1 \end{cases}$$

In definitiva le soluzioni sono

$$1^{\circ} \operatorname{tg} x = -1 \quad \text{e} \quad 2^{\circ} \operatorname{tg} x = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

da 1^a si ha

$$\operatorname{tg} x = \operatorname{tg} \frac{3}{4} \pi$$

da cui

$$x = \frac{3}{4} \pi + k\pi$$

da 2^a si ha

$$\operatorname{tg} x = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

dai valori
~~dei~~ della tangente

$$\operatorname{tg} x = \operatorname{tg} \frac{\pi}{6}$$

da cui

$$x = \frac{\pi}{6} + k\pi$$

Verifichiamo se $\frac{\pi}{2}$ è soluzione. In precedenza

abbiamo diviso per $\cos x$ e sappiamo bene che

$\cos \frac{\pi}{2} = 0$, per cui le soluzioni $x = \frac{\pi}{2}$ non si possono

ritrovare con questa tecnica e quindi si deve

verificare puntualmente se $x = \frac{\pi}{2}$ è una ulteriore soluzione.

$$(3 + \sqrt{3}) \sin^2 \frac{\pi}{2} + 2 \cos^2 \frac{\pi}{2} + (\sqrt{3} - 1) \sin \frac{\pi}{2} \cdot \cos \frac{\pi}{2} - 3 = 0$$

$$(3 + \sqrt{3}) \cdot 1 + 2 \cdot 0 + (\sqrt{3} - 1) \cdot 1 \cdot 0 - 3 = 0$$

$3 + \sqrt{3} - 3 = 0$; $\sqrt{3} = 0$ che è una proposizione falsa, quindi $x = \frac{\pi}{2}$ non è soluzione.

In definitiva le uniche famiglie di soluzioni sono

$$1) x = \frac{3}{4} \pi + k\pi$$

$$2) x = \frac{\pi}{6} + k\pi$$

Esercizio

$$4 \sin^3 x - 8 \cos^3 x - 3 \sin x + 2 \cos x = 0 \quad (1)$$

$$4 \sin^3 x - 8 \cos^3 x + (-3 \sin x + 2 \cos x) = 0$$

Moltiplichiamo il termine $(-3 \sin x + 2 \cos x)$ per

$$1 = \cos^2 x + \sin^2 x$$

$$4 \sin^3 x - 8 \cos^3 x + (-3 \sin x + 2 \cos x)(\cos^2 x + \sin^2 x) = 0$$

$$4 \sin^3 x - 8 \cos^3 x - 3 \sin x \cos^2 x - 3 \sin^3 x + 2 \cos^3 x + 2 \cos x \sin^2 x = 0$$

Dividiamo tutto per $\cos^3 x$, dopo avere sommato per termini simili.

$$\sin^3 x - 6 \cos^3 x - 3 \sin x \cos^2 x + 2 \cos x \sin^2 x = 0$$

$$\frac{\sin^3 x}{\cos^3 x} - \frac{6 \cancel{\cos^3 x}}{\cancel{\cos^3 x}} - \frac{3 \sin x \cancel{\cos^2 x}}{\cancel{\cos^3 x}} + \frac{2 \cancel{\cos x} \sin^2 x}{\cancel{\cos^3 x}} = 0$$

$$\tan^3 x - 6 - 3 \tan x + 2 \tan^2 x = 0 \quad (2)$$

$$\tan^3 x + 2 \tan^2 x - 3 \tan x - 6 = 0 \quad (3)$$

poniamo $\tan x = t$

$$t^3 + 2t^2 - 3t - 6 = 0 \quad (4)$$

I divisori di 6 sono: $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$

(57)

Proviamo per 2

$$2^3 + 2 \cdot 2^2 - 3 \cdot 2 - 6 = 0; \quad 8 + 8 - 6 - 6 = 0 \quad 4 = 0 \text{ (falso)}$$

Proviamo per -2

$$(-2)^3 + 2(-2)^2 - 3(-2) - 6 = 0; \quad -8 + 8 + 6 - 6 = 0;$$

$0 = 0$ quindi $x = -2$ è soluzione

Componiamo la (4) con Ruffini

	1	2	-3	-6
-2		-2	0	+6
	1	0	-3	//

$$(t+2)(t^2-3)=0$$

1° fattore $t+2=0$, $t_1 = -2$

2° fattore $t^2-3=0$; $t^2=3$; $t=\pm\sqrt{3}$; $t_2 = \sqrt{3}$
 $t_3 = -\sqrt{3}$

Risumiamo

$$1) t_1 = -2 ; 2) t_2 = \sqrt{3} ; 3) t_3 = -\sqrt{3}$$

Le sostituzioni e $\tan x = t$

$$1) \tan x = -2 ; x = \arctan(-2) + k\pi$$

$$2) \tan x = \sqrt{3} ; x = \frac{\pi}{3} + k\pi$$

$$3) \tan x = -\sqrt{3} ; x = -\frac{\pi}{3} + k\pi$$

Verifichiamo se $x = \frac{\pi}{2}$ è soluzione

$$4 \sin^3\left(\frac{\pi}{2}\right) - 8 \cos^3\left(\frac{\pi}{2}\right) - 3 \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) + 2 \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

$$4 \cdot 1 - 8 \cdot 0 - 3 \cdot 1 + 2 \cdot 0 = 0$$

$$4 - 0 - 3 + 0 = 1 \neq 0 \text{ (falso) quindi } x = \frac{\pi}{2} \text{ non}$$

è soluzione.

Soluzioni grafiche delle equazioni omogenee

(59)

Sia data

$$a \sin^2 x + b \sin x \cos x + c \cos^2 x + d \quad (1)$$

può essere facilmente trasformata in una espressione lineare in $\cos 2x$ e in $\sin 2x$. Per fare ciò si utilizzano le formule:

$$1.1) \sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$$

$$2) \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$$

$$3) \sin x \cdot \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x$$

Con tali formule la (1) diventa

$$a \left(\frac{1 - \cos 2x}{2} \right) + b \left(\frac{1}{2} \sin 2x \right) + c \left(\frac{1 + \cos 2x}{2} \right) + d \quad (4)$$

Esempio

(60)

$$\sqrt{3} \tan^2 x + 2 \tan x \cos x - \sqrt{3} \cos^2 x - \sqrt{3} = 0 \quad (1)$$

Per le formule precedenti si ha:

$$\sqrt{3} \left(\frac{1 - \cos 2x}{2} \right) + 2 \left(\frac{1}{2} \tan 2x \right) - \sqrt{3} \left(\frac{1 + \cos 2x}{2} \right) - \sqrt{3} = 0$$

$$\frac{\sqrt{3}(1 - \cos 2x)}{2} + \tan 2x - \frac{\sqrt{3}(1 + \cos 2x)}{2} - \sqrt{3} = 0$$

$$\frac{\sqrt{3} - \sqrt{3} \cos 2x}{2} + \tan 2x - \frac{\sqrt{3} + \sqrt{3} \cos 2x}{2} - \sqrt{3} = 0$$

$$\frac{\cancel{\sqrt{3}} - \sqrt{3} \cos 2x + 2 \tan 2x - \cancel{\sqrt{3}} - \sqrt{3} \cos 2x - 2\sqrt{3}}{2} = \frac{0}{2}$$

$$\cos 2x (-\sqrt{3} - \sqrt{3}) + 2 \tan 2x - 2\sqrt{3} = 0$$

$$-2\sqrt{3} \cos 2x + 2 \tan 2x - 2\sqrt{3} = 0$$

$$\sqrt{3} \cos 2x - \tan 2x + \sqrt{3} = 0 \quad (2)$$

A questo punto si studia il sistema tra le (2) e la relazione fondamentale della goniometria

$$(3) \begin{cases} \sqrt{3} \cos 2x - \sin 2x + \sqrt{3} = 0 \\ \cos^2 2x + \sin^2 2x = 1 \end{cases}$$

Si pone

$$\cos 2x = X \quad \text{e} \quad \sin 2x = Y$$

$$(4) \begin{cases} \sqrt{3} X - Y + \sqrt{3} = 0 \\ X^2 + Y^2 = 1 \end{cases}$$

$$-Y = -\sqrt{3} X - \sqrt{3} ; Y = \sqrt{3} X + \sqrt{3}$$

$$X^2 + (\sqrt{3} X + \sqrt{3})^2 = 1 ; X^2 + 3X^2 + 3 + 6X - 1 = 0 ;$$

$$4X^2 + 6X + 2 = 0 ; 2X^2 + 3X + 1 = 0$$

$$X = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 4(2)(1)}}{4} = \frac{-3 \pm 1}{4} = \begin{cases} -1 \\ -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$X_1 = -1; \quad X_2 = -\frac{1}{2}$$

Sostituiamo $X_1 = -1$ ~~con~~ nella 4.1

$$\sqrt{3}(-1) - Y + \sqrt{3} = 0; \quad -\cancel{\sqrt{3}} - Y + \cancel{\sqrt{3}} = 0; \quad Y = 0$$

Sostituiamo $X_2 = -\frac{1}{2}$ nella 4.1

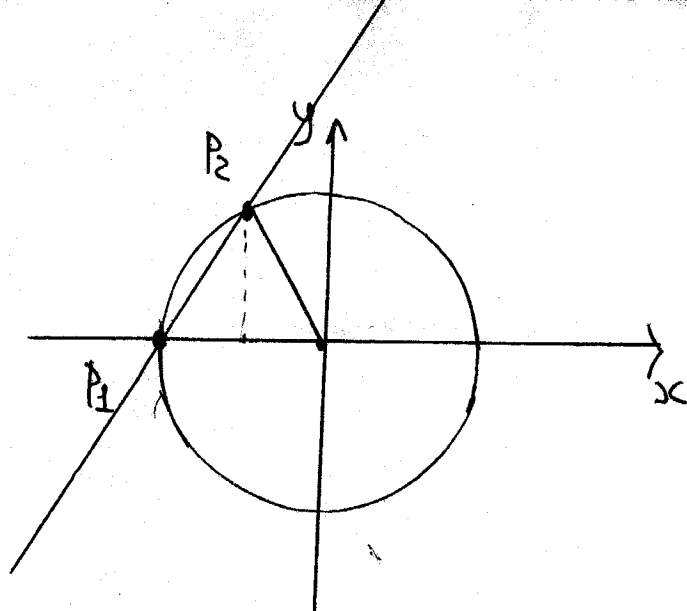
$$\sqrt{3}\left(-\frac{1}{2}\right) - Y + \sqrt{3} = 0; \quad -\frac{\sqrt{3}}{2} - Y + \sqrt{3} = 0;$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} + Y - \sqrt{3} = 0; \quad Y = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \sqrt{3};$$

$$Y = \frac{-\sqrt{3} + 2\sqrt{3}}{2}; \quad Y = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Riassumiamo i risultati:

$$P_1\left(-1; 0\right) \quad \text{e} \quad P_2\left(-\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \quad (5)$$



L'angolo per il quale z ottiene P_2 è π ,

segue

$$2X = \pi + 2K\pi \quad ; \quad \boxed{X = \frac{\pi}{2} + K\pi} \quad (6)$$

come P_2

$$2X = \frac{2}{3}\pi + 2K\pi \quad ; \quad \boxed{X = \frac{\pi}{3} + K\pi} \quad (7)$$

Le due famiglie di soluzioni sono le (6) e le (7).

Equazioni di 2° grado simmetriche

Una equazione del tipo

$$a \operatorname{sen} x \cos x + b (\operatorname{sen} x + \cos x) + c = 0 \quad (1)$$

è detta simmetrica in quanto cambiando $\operatorname{sen} x$ con $\cos x$ e rimane invariata

In tali equazioni si pone

$$x = y - \frac{\pi}{4} \quad (2)$$

Con tale sostituzione si ha

$$\operatorname{sen} x = \operatorname{sen} \left(y - \frac{\pi}{4} \right) = \quad (3)$$

applicando la formula di sottrazione del seno

$$\operatorname{sen}(\alpha - \beta) = \operatorname{sen} \alpha \cos \beta - \cos \alpha \operatorname{sen} \beta$$

$$\text{inoltre sappiamo che } \operatorname{sen} \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{e} \quad \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\begin{aligned} \text{che (3)} &= \operatorname{sen} y \cdot \cos \frac{\pi}{4} - \cos y \cdot \operatorname{sen} \frac{\pi}{4} = \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \operatorname{sen} y - \frac{\sqrt{2}}{2} \cos y = \frac{\sqrt{2}}{2} (\operatorname{sen} y - \cos y) \end{aligned}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \operatorname{sen} y - \frac{\sqrt{2}}{2} \cos y + \frac{\sqrt{2}}{2} \cos y + \frac{vc}{2} \operatorname{sen} y = \operatorname{sen} x + \cos x$$

$$\boxed{2\sqrt{2} \operatorname{sen} y = \operatorname{sen} x + \cos x} \quad (7)$$

Liceo

$$\operatorname{sen} x = \frac{\sqrt{2}}{2} (\operatorname{sen} y - \cos y) \quad (4)$$

Calculamos $\cos x$

$$\cos x = \cos\left(y - \frac{\pi}{4}\right) = \quad (5)$$

sabiendo que

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta$$

de (5)

$$\begin{aligned} \cos y \cdot \cos \frac{\pi}{4} + \operatorname{sen} y \cdot \operatorname{sen} \frac{\pi}{4} &= \frac{\sqrt{2}}{2} \cos y + \frac{\sqrt{2}}{2} \operatorname{sen} y = \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} (\cos y + \operatorname{sen} y) \end{aligned}$$

Liceo

$$\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2} (\cos y + \operatorname{sen} y) \quad (6)$$

Calculamos (4) + (6)

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{2}}{2} (\operatorname{sen} y - \cos y) + \frac{\sqrt{2}}{2} (\cos y + \operatorname{sen} y) &= \operatorname{sen} x + \cos x \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \operatorname{sen} y - \frac{\sqrt{2}}{2} \cos y + \frac{\sqrt{2}}{2} \cos y + \frac{\sqrt{2}}{2} \operatorname{sen} y &= \operatorname{sen} x + \cos x \\ \boxed{2\sqrt{2} \operatorname{sen} y = \operatorname{sen} x + \cos x} &\quad (7) \end{aligned}$$

Calcoliamo

$$\sin x \cdot \cos x = \left[\frac{\sqrt{2}}{2} (\sin y - \cos y) \right] \cdot \left[\frac{\sqrt{2}}{2} (\sin y + \cos y) \right] =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot (\sin y - \cos y)(\sin y + \cos y) = \frac{2}{4} (\sin^2 y - \cos^2 y) =$$

$$= \frac{1}{2} (\sin^2 y - \cos^2 y) =$$

inseriamo la relazione fondamentale

$$\cos^2 y + \sin^2 y = 1 \quad ; \quad \cos^2 y = 1 - \sin^2 y$$

$$= \frac{1}{2} (\sin^2 y - (1 - \sin^2 y)) = \frac{1}{2} (\sin^2 y - 1 + \sin^2 y) = \frac{1}{2} (2 \sin^2 y - 1)$$

In definitiva

$$\boxed{\sin x \cdot \cos x = \frac{1}{2} (2 \sin^2 y - 1)}$$

Dopo aver fatto tale lavoro preventivo inseriamo le equazioni trovate nelle (1)

$$a \left[\frac{1}{2} (2 \sin^2 y - 1) \right] + b (\sqrt{2} \sin y) + c = 0$$

$$\frac{a}{2} \cdot 2 \sin^2 y - \frac{a}{2} + b\sqrt{2} \sin y + c = 0$$

$$a \sin^2 y + b\sqrt{2} \sin y + \left(c - \frac{a}{2}\right) = 0$$

che è una equazione di 2° grado in $\sin y$.

Esercizio

$$\sin X - \cos X = 0$$

tale equazione la si può studiare sia come lineare sia come omogenea. La studiamo come lineare.

Ricordiamo che

$$\sin X = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{X}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{X}{2}} \quad ; \quad \cos X = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{X}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{X}{2}}$$

e si deve verificare se $X = \pi + k2\pi$ è o non è soluzione.

Verifichiamo se $X = \pi + k2\pi$ è soluzione:

$\sin \pi - \cos \pi = 0$; $0 - (-1) = 0$; $1 = 0$ (falso) quindi $X = \pi + k2\pi$ NON è soluzione.

$$\frac{2 \operatorname{tg} \frac{X}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{X}{2}} - \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{X}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{X}{2}} = 0$$

$$\frac{2 \operatorname{tg} \frac{X}{2} - \left(1 - \operatorname{tg}^2 \frac{X}{2}\right)}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{X}{2}} = 0$$

$$2 \operatorname{tg} \frac{x}{2} - 1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} = 0;$$

$$\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} + 2 \operatorname{tg} \frac{x}{2} - 1 = 0;$$

$$\operatorname{tg} \frac{x}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4(1)(-1)}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{8}}{2} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{2}}{2} =$$

$$= \frac{x(-1 \pm \sqrt{2})}{x} = -1 \pm \sqrt{2} = \begin{cases} -1 + \sqrt{2} & (1) \\ -1 - \sqrt{2} & (2) \end{cases}$$

Dalle tabelle della tangente si ha che

$$\operatorname{tg} \frac{\pi}{8} = \sqrt{2} - 1$$

da cui

$$\operatorname{tg} \frac{x}{2} = \operatorname{tg} \frac{\pi}{8}.$$

$$\frac{x}{2} = \frac{\pi}{8} + K\pi; \quad x = 2 \cdot \frac{\pi}{8} + 2K\pi;$$

$$\boxed{x = \frac{\pi}{4} + 2K\pi}$$

Se $\frac{\pi}{8}$ è soluzione $\Rightarrow$ anche $\frac{\pi}{8} + \pi$ è soluzione

$$\frac{x}{2} = \frac{\pi}{8} + \pi + K\pi; \quad x = \frac{\pi}{4} + 2\pi + 2K\pi;$$

$$x = \frac{\pi}{4} + 2K\pi$$

Esercizio

70

$$(1-\sqrt{2}) \cos 3x - \tan 3x + \sqrt{2} - 1 = 0$$

(Lineare)

poniamo $3x = t$

$$(1-\sqrt{2}) \cos t - \tan t + \sqrt{2} - 1 = 0$$

$$\tan t = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{t}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{t}{2}} ; \cos t = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{t}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{t}{2}}$$

$$(1-\sqrt{2}) \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{t}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{t}{2}} - \frac{2 \operatorname{tg} \frac{t}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{t}{2}} + \sqrt{2} - 1 = 0$$

$$\frac{(1-\sqrt{2})(1 - \operatorname{tg}^2 \frac{t}{2}) - 2 \operatorname{tg} \frac{t}{2} + (\sqrt{2} - 1)(1 + \operatorname{tg}^2 \frac{t}{2})}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{t}{2}} = \frac{0}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{t}{2}}$$

$$1 - \operatorname{tg}^2 \frac{t}{2} - \sqrt{2} + \sqrt{2} \operatorname{tg}^2 \frac{t}{2} - 2 \operatorname{tg} \frac{t}{2} + \sqrt{2} + \sqrt{2} \operatorname{tg}^2 \frac{t}{2} - 1 - \operatorname{tg}^2 \frac{t}{2} = 0$$

$$\operatorname{tg}^2 \frac{t}{2} (-1 + \sqrt{2} + \sqrt{2} - 1) - 2 \operatorname{tg} \frac{t}{2} + (1 - \sqrt{2} + \sqrt{2} - 1) = 0$$

$$(2\sqrt{2} - 2) \operatorname{tg}^2 \frac{t}{2} - 2 \operatorname{tg} \frac{t}{2} = 0$$

$$2(\sqrt{2}-1)\tan^2 \frac{t}{2} - 2\tan \frac{t}{2} = 0;$$

$$(\sqrt{2}-1)\tan^2 \frac{t}{2} - \tan \frac{t}{2} = 0$$

$$\tan \frac{t}{2} \left[(\sqrt{2}-1)\tan \frac{t}{2} - 1 \right] = 0$$

1º fator $\boxed{\tan \frac{t}{2} = 0}$

2º fator $(\sqrt{2}-1)\tan \frac{t}{2} - 1 = 0; (\sqrt{2}-1)\tan \frac{t}{2} = 1;$

$$\tan \frac{t}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}-1} = \frac{(\sqrt{2}+1)}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)} = \frac{\sqrt{2}+1}{2-1} =$$

$$= \sqrt{2}+1$$

Logo $\tan \frac{t}{2} = \sqrt{2}+1$

Do 1º fator 2º ha

$$\tan \frac{3x}{2} = 0; \tan \frac{3x}{2} = \tan 0; \frac{3}{2}x = 0 + k\pi;$$

$$3x = 2k\pi; \boxed{x = \frac{2}{3}\pi k}$$

$$\boxed{x = \frac{\pi}{4} + \frac{2}{3}k\pi}$$

Dal 2° settore si ha

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \sqrt{2} + 1 ;$$

$$\operatorname{tg} \frac{3\alpha}{2} = \sqrt{2} + 1$$

dalle tabelle delle tangente si ha

$$\operatorname{tg} \frac{3}{8} \pi = \sqrt{2} + 1$$

da cui

$$\operatorname{tg} \frac{3}{2} \alpha = \operatorname{tg} \frac{3}{8} \pi ;$$

$$\frac{3}{2} \alpha = \frac{3}{8} \pi + K\pi ; \quad \text{moltiplichiamo per } \frac{2}{3}$$

$$\frac{3}{2} \alpha \cdot \frac{2}{3} = \frac{3}{8} \pi \cdot \frac{2}{3} + K\pi \cdot \frac{2}{3}$$

$$\boxed{\alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{2}{3} K\pi}$$

Equazioni biquadratiche omogenee in $\sin x$ e $\cos x$

73

Sono del tipo

$$a \sin^4 x + b \cos^4 x + c \sin^2 x \cos^2 x + d = 0 \quad (1)$$

si moltiplica per 1, cioè per

$$1 = (\sin^2 x + \cos^2 x)^2$$

e successivamente si divide tutto per $\cos^4 x$ e si tratta come una equazione ad omogenea.

Esempio

$$6 \sin^4 x + 2 \sin^2 x \cos^2 x + 4 \cos^4 x - 3 = 0 \quad (1)$$

$$6 \sin^4 x + 2 \sin^2 x \cos^2 x + 4 \cos^4 x - 3 (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 = 0$$

$$6 \sin^4 x + 2 \sin^2 x \cos^2 x + 4 \cos^4 x - 3 (\cos^4 x + \sin^4 x + 2 \cos^2 x \sin^2 x) = 0$$

$$\underline{6 \sin^4 x} + \underline{2 \sin^2 x \cos^2 x} + \underline{4 \cos^4 x} - \underline{3 \cos^4 x} - \underline{3 \sin^4 x} - \underline{6 \cos^2 x \sin^2 x} = 0$$

$$3 \sin^4 x - 4 \cos^2 x \sin^2 x + \cos^4 x = 0$$

dividiamo per $\cos^4 x$

$$\frac{3 \cancel{\cos^4 x} \cancel{\cos^2 x}}{\cancel{\cos^4 x}} - \frac{4 \cancel{\cos^3 x} \cancel{\cos^2 x}}{\cancel{\cos^2 x}} + \frac{\cancel{\cos^4 x}}{\cancel{\cos^4 x}} = 0$$

$$3 \cancel{\cos^4 x} - 4 \cancel{\cos^2 x} + 1 = 0 \quad (2)$$

$$\cancel{\cos^2 x} = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4(3)(1)}}{6} = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 12}}{6} =$$

$$= \frac{4 \pm 2}{6} = \begin{cases} \frac{6}{6} = 1 & (3) \\ \frac{2}{6} = \frac{1}{3} & (4) \end{cases}$$

dalla (3) si ottiene:

$$\cancel{\cos^2 x} = 1; \quad \cancel{\cos x} = \pm 1;$$

$$\boxed{\cancel{\cos x} = 1} \quad (5)$$

e

$$\boxed{\cancel{\cos x} = -1} \quad (6)$$

dalla (4) si ha

$$\cancel{\cos^2 x} = \frac{1}{3}$$

$$\cancel{\cos x} = \pm \sqrt{\frac{1}{3}} \quad \begin{cases} \cancel{\cos x} = \sqrt{\frac{1}{3}} \\ \cancel{\cos x} = -\sqrt{\frac{1}{3}} \end{cases}$$

$$\operatorname{tg} x = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3} \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

quindi

$$\boxed{\operatorname{tg} x = \frac{\sqrt{3}}{3}} \quad (7)$$

$$\boxed{\operatorname{tg} x = -\frac{\sqrt{3}}{3}} \quad (8)$$

dalla tabella dei valori della tangente si ha

$$\operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = 1 \quad ; \quad \operatorname{tg} \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

dalla (5) abbiamo

$$\operatorname{tg} x = \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} ; \quad \boxed{x = \frac{\pi}{4} + K\pi} \quad (9)$$

dalla (6) abbiamo

$$\operatorname{tg} x = \operatorname{tg} \left(-\frac{\pi}{4}\right) ; \quad \boxed{x = -\frac{\pi}{4} + K\pi} \quad (10)$$

dalla (7)

$$\operatorname{tg} x = \operatorname{tg} \frac{\pi}{6} ; \quad \boxed{x = \frac{\pi}{6} + K\pi} \quad (11)$$

dalla (8)

$$\operatorname{tg} x = \operatorname{tg} \left(-\frac{\pi}{6}\right) ; \quad \boxed{x = -\frac{\pi}{6} + K\pi} \quad (12)$$

Le (9), (10), (11), (12) sono le famiglie delle soluzioni.

(76)

Visto che abbiamo ottenuto per $\cos^4 x$ non possiamo stimare se $x = \frac{\pi}{2}$ è o non è soluzione.

Verifichiamo puntualmente:

$$6 \sin^4 \frac{\pi}{2} + 2 \sin^2 \frac{\pi}{2} \cdot \cos^2 \frac{\pi}{2} + 4 \cos^4 \frac{\pi}{2} - 3 = 0$$

$$6 \cdot 1 + 2 \cdot 1 \cdot 0 + 4 \cdot 0 - 3 = 0$$

$$6 + 0 + 0 - 3 = 0; \quad 3 = 0 \text{ (falso) quindi}$$

$$x = \frac{\pi}{2} + k\pi \text{ non è soluzione.}$$

Complementi

Sulle equazioni goniometriche riconducibili ad
Altra forma.

E' bene tenere presente quando non risulta
conveniente applicare le tecniche precedenti che:

1) e' bene trasformare l'equazione in una
equivalente che contiene soltanto una funzione
goniometrica

2) e' bene evitare trasformazioni che inseriscano
radicali.

Esempio:

$$2 \sin^2 x - 3 \cos x = 0 \quad (1)$$

sappiamo che $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$; $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$;

che (1) diventa

$$2(1 - \cos^2 x) - 3 \cos x = 0; \quad 2 - 2 \cos^2 x - 3 \cos x = 0$$

$$-2 \cos^2 x - 3 \cos x + 2 = 0; \quad 2 \cos^2 x + 3 \cos x - 2 = 0 \quad (2)$$

che (2) e' equivalente alla (1).

$$\cos x = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 4(2)(-2)}}{4} = \frac{-3 \pm \sqrt{9 + 16}}{4} =$$

$$= \frac{-3 \pm 5}{4} = \begin{cases} \frac{2}{4} = \frac{1}{2} & (3) \\ \frac{-8}{4} = -2 & (4) \end{cases}$$

La (4) è da scartare in quanto è $\cos x < -1$.

$$(3) \quad \cos x = \frac{1}{2}$$

dalle tabelle dei valori del coseno, sappiamo che

$$\cos \frac{\pi}{3} = \cos x = \frac{1}{2}$$

da cui

$$\cos \frac{\pi}{3} = \cos x; \quad \boxed{x = \frac{\pi}{3} + k2\pi}$$

Esercizio

79

$$\sin^2 x + \cos x = 1 + \cos x (\cos x + 1) \quad (1)$$

$$\sin^2 x + \cancel{\cos x} = 1 + \cos^2 x + \cancel{\cos x}$$

$$\sin^2 x - \cos^2 x - 1 = 0 \quad (2) \quad \text{La (2) è equivalente alla (1).}$$

Dalla relazione fondamentale si ha $1 = \sin^2 x + \cos^2 x$;

$$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x \quad (3)$$

(3) in (2)

$$\cancel{1} - \cos^2 x - \cos^2 x - \cancel{1} = 0 ; -2\cos^2 x = 0 ; 2\cos^2 x = 0$$

$$\cos^2 x = 0 \Rightarrow \boxed{X = \frac{\pi}{2} + 2k\pi} \text{ e}$$

$$\boxed{X = \frac{3}{2}\pi + 2k\pi}$$

Esercizio

80

$$\text{Def } Z(x) = \frac{1}{\cot x - \tan x} \quad (1)$$

E' bene se $D(x) \neq 0$.

Verifichiamo per quali valori di x $D(x) = 0$

$$\cot x - \tan x = 0; \quad \frac{1}{\tan x} - \tan x = 0; \quad \frac{1 - \tan^2 x}{\tan x} = 0;$$

dove anche $\tan x \neq 0$; e $\tan x \neq +\infty \Rightarrow$

$$x_1 \neq 0 + k\pi \quad \text{e} \quad x_2 \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$$

Inoltre dove anche $1 - \tan^2 x \neq 0$. Studiamo

$$1 - \tan^2 x = 0; \quad 1 = \tan^2 x; \quad \tan x = \pm 1; \quad \text{rappresento le}$$

$$\tan \frac{\pi}{4} = 1 \Rightarrow x_3 \neq \frac{\pi}{4} + k\pi$$

$$\text{e rappresento le } \tan\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -1; \quad \tan x = \tan\left(-\frac{\pi}{4}\right)$$

$$x_4 \neq -\frac{\pi}{4} + k\pi$$

Le (1) esiste a meno che x sia diverso da:

$$x_1 \neq k\pi; \quad x_2 \neq \frac{\pi}{2} + k\pi; \quad x_3 \neq \frac{\pi}{4} + k\pi; \quad x_4 \neq -\frac{\pi}{4} + k\pi$$

troviamo che (1) e sviluppiamo i calcoli nell'ottica di avere 1 sola funzione goniometrica.

Dalle formule di duplicazione sappiamo che

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$$

che (1) ha:

$$\sin 2x = \frac{1}{\operatorname{ctg} x - \operatorname{tg} x} ; \quad 2 \sin x \cos x = \frac{1}{\frac{\cos x}{\sin x} - \frac{\sin x}{\cos x}} ;$$

$$2 \sin x \cos x = \frac{1}{\frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\sin x \cos x}} ;$$

$$2 \sin x \cos x = \frac{\cancel{\sin x} \cancel{\cos x}}{\cos^2 x - \sin^2 x} ;$$

$$2 = \frac{1}{\cos^2 x - \sin^2 x} ; \quad 2(\cos^2 x - \sin^2 x) = 1 ;$$

$$2 \cos^2 x - 2 \sin^2 x = 1 ;$$

$$2 \cos^2 x - 2 \sin^2 x = \sin^2 x + \cos^2 x ;$$

$$\underline{2 \cos^2 x} - \underline{2 \sin^2 x} - \underline{\sin^2 x} - \underline{\cos^2 x} = 0 ;$$

$$\cos^2 x - 3 \sin^2 x = 0$$

dividiamo tutto per $\cos^2 x$

$$\frac{\frac{1}{\cancel{\cos^2 x}}}{\cancel{\cos^2 x}} - \frac{3 \tan^2 x}{\cos^2 x} = 0$$

$$1 - 3 \tan^2 x = 0; \quad 1 = 3 \tan^2 x;$$

$$\tan^2 x = \frac{1}{3} \quad ; \quad \tan x = \pm \sqrt{\frac{1}{3}}$$

$$\tan x = \pm \frac{1}{\sqrt{3}} \quad ; \quad \tan x = \pm \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}};$$

$$\tan x = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$1^\circ \quad \tan x = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$2^\circ \quad \tan x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\text{Sappiamo che } \tan \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow$$

$$\boxed{x = \frac{\pi}{6} + k\pi}$$

$$\text{Inoltre sappiamo che } \tan \frac{5}{6} \pi = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\alpha_6 = \frac{5}{6} \pi + k\pi$$

Le verifiche per $\alpha = \frac{\pi}{2}$ non le facciamo
in quanto in precedenza avevamo trattato che
per $\alpha = \frac{\pi}{2} + k\pi$ l'equazione non esiste.

In definitiva le famiglie delle soluzioni sono

$$\alpha_5 = \frac{\pi}{6} + k\pi \quad e$$

$$\alpha_6 = \frac{5}{6} \pi + k\pi$$

Esempio

$$\cos 2x + 3 \sin x - 2 = 0 \quad (1)$$

dalle formule di duplicazione si ha:

~~cos 2x = 1 - 2 sin² x~~

$$\cos 2x = 1 - 2 \sin^2 x$$

per cui la (1) diventa

$$1 - 2 \sin^2 x + 3 \sin x - 2 = 0 ; \quad -2 \sin^2 x + 3 \sin x - 1 = 0 ;$$

$$2 \sin^2 x - 3 \sin x + 1 = 0$$

$$\sin x = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 4(2)(1)}}{4} = \frac{3 \pm 1}{4} = \begin{cases} 1 \\ \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$1) \sin x = 1$$

$$2) \sin x = \frac{1}{2}$$

che 1) si ha $\sin x = \sin \frac{\pi}{2} = 1 ;$

$$x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

che 2) si ha $\sin x = \frac{1}{2} ;$ ~~$\sin x = \sin \frac{\pi}{6}$~~ $\sin x = \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$

$$x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$$

Esempio

$$\sin^2 x = 1 - \cos^2 \frac{x}{2} \quad (1)$$

Rappresento che

$$\cos^2 \frac{x}{2} = \frac{1 + \cos x}{2}$$

Dalla (1) si ha

$$\sin^2 x = 1 - \frac{1 + \cos x}{2} \quad (2)$$

Cerchiamo di ottenere una equazione goniometrica in una sola funzione goniometrica.

Dalla relazione fondamentale sappiamo che:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1; \quad \sin^2 x = 1 - \cos^2 x \quad (3)$$

(3) in (2):

$$1 - \cos^2 x = 1 - \frac{1 + \cos x}{2}; \quad \cancel{x} - 2\cos^2 x = \cancel{x} - (1 + \cos x)$$

$$-2\cos^2 x = -1 - \cos x; \quad -2\cos^2 x + 1 + \cos x = 0;$$

$$2\cos^2 x - \cos x - 1 = 0; \quad \cos x = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4(2)(-1)}}{4} = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{4} =$$

$$= \frac{1 \pm 3}{4} = \begin{cases} 1 \\ -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$1) \cos x = 1$$

$$2) \cos x = -\frac{1}{2}$$

ole 1) z: he

$$\cos x = 1; \quad \cos x = \cos 0 = 1;$$

$$x = 0 + 2\pi k; \quad \boxed{x = k2\pi}$$

ole 2) z: he

$$\cos x = -\frac{1}{2}; \quad \cos x = \cos \frac{2}{3}\pi = \cos\left(-\frac{2}{3}\pi\right) = -\frac{1}{2} \quad \Rightarrow$$

$$\boxed{x = \pm \frac{2}{3}\pi + 2k\pi}$$

Esercizio

$$\sin x + \cos \frac{x}{2} = 0 \quad (1)$$

osserviamo che se sostituiamo $\cos \frac{x}{2}$ con le formule di bisezione abbiamo introdotto i radicali e ciò è spesso sveniente.

È preferibile vedere $\sin x$ come $\sin 2 \cdot \frac{x}{2}$ e svilupparlo con le formule di duplicazione.
da (1)

~~sen x~~ $\sin 2 \cdot \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2} = 0 \quad (2)$

$$2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2} = 0 ; \cos \frac{x}{2} \left(2 \sin \frac{x}{2} + 1 \right) = 0 ;$$

$$\cos \frac{x}{2} = 0 \quad \text{primo fattore}$$

$$2 \sin \frac{x}{2} + 1 \quad \text{secondo fattore}$$

dal 1° fattore $\cos \frac{x}{2} = 0 ; \cos \frac{x}{2} = \cos \frac{\pi}{2} = 0 ;$

$$\frac{x}{2} = \frac{\pi}{2} + k\pi ; x = \pi + 2k\pi ; \boxed{x = \pi + k2\pi} \quad (3)$$

dal secondo fattore

$$2 \operatorname{sen} \frac{x}{2} + 1 = 0 \quad (4)$$

(8)

$$2 \operatorname{sen} \frac{x}{2} = -1; \operatorname{sen} \frac{x}{2} = -\frac{1}{2}$$

dalle tabelle del seno $\operatorname{sen} \frac{x}{2} = \operatorname{sen} \frac{7}{6} \pi = \operatorname{sen} \left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}$

dalla 1^a uguaglianza

$$\frac{x}{2} = \frac{7}{6} \pi + 2K\pi; \quad x = 2 \cdot \frac{7}{6} \pi + 4K\pi;$$

$$\boxed{x = \frac{7}{3} \pi + 4K\pi} \quad (5)$$

dalla 2^a uguaglianza

$$\frac{x}{2} = -\frac{\pi}{6} + 2K\pi; \quad x = 2 \cdot \left(-\frac{\pi}{6}\right) + 4K\pi;$$

$$\boxed{x = -\frac{\pi}{3} + 4K\pi} \quad (6)$$

Esempio

89

$$\sin 4x - \sin 2x - \sin x = 0 \quad (1)$$

applichiamo le formule di prostaferoni
al binomio

$$\sin 4x - \sin 2x$$

$$\sin p - \sin q = 2 \cos \frac{p+q}{2} \cdot \sin \frac{p-q}{2}$$

$$p = 4x \quad \text{e} \quad q = 2x$$

$$\sin 4x - \sin 2x = 2 \cos \frac{4x+2x}{2} \cdot \sin \frac{4x-2x}{2} :$$

$$= 2 \cos 3x \cdot \sin x = 2 \cos 3x \cdot \sin x \quad (2)$$

(1) divisione

$$2 \cos 3x \cdot \sin x - \sin x = 0 \quad (3)$$

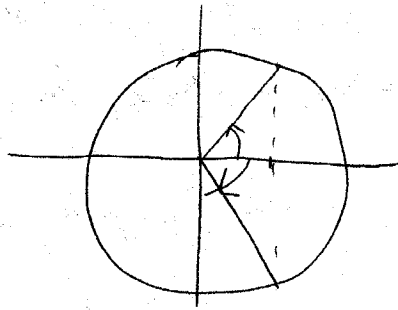
$$\sin x (2 \cos 3x - 1) = 0; \quad 1^\circ \text{ fattore } \sin x = 0$$

$$\text{e } 2^\circ \text{ fattore } 2 \cos 3x - 1 = 0$$

$$\text{dal } 1^\circ \text{ fattore } \sin x = 0$$

$$\boxed{x = k\pi} \quad (4)$$

$$2 \cos 3x = 1; \quad \cos 3x = \frac{1}{2}$$



$$\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} \quad \text{e} \quad \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$$

$$\cos 3x = \cos \frac{\pi}{3} = \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$$

dalla 1^a uguaglianza

$$3x = \frac{\pi}{3} + K2\pi;$$

$$x = \frac{\pi}{9} + \frac{2}{3} K\pi \quad (5)$$

dalla 2^a uguaglianza

$$\cos 3x = \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right); \quad 3x = -\frac{\pi}{3} + K2\pi;$$

$$x = -\frac{\pi}{9} + \frac{2}{3} K\pi \quad (6)$$

(4), (5), (6) sono le famiglie delle soluzioni.

Esempio

$$\sin x + \sin 2x + \sin 3x = 0 \quad (1)$$

È evidente che l'applicazione delle formule di prostafora è la via più conveniente.

Vediamo quale idea perverremo al fine di scegliere 2 tra i 3 addendi e un applicare le formule.

Solitamente conviene trovare 2 addendi tale che sia sommando che sottraendo otteniamo 2 valori pari, che a loro volta possono essere divisi per 2.

Utilizzando tale criterio di scelta utilizzeremo 1° e 3° addendo.

$$\sin p + \sin q = 2 \sin \frac{p+q}{2} \cdot \cos \frac{p-q}{2} \quad (2)$$

le applichiamo a

$$\sin 3x + \sin x \quad (3)$$

$$\sin 3x + \sin x = 2 \sin \frac{3x+x}{2} \cdot \cos \frac{3x-x}{2} =$$

$$= 2 \sin 2x \cdot \cos x \quad (4)$$

dalla (1) si ottiene

$$2 \sin 2x \cdot \cos x + \sin 2x = 0$$

$$\sin 2x (2 \cos x + 1) = 0$$

1° fattore $\sin 2x = 0$

2° fattore $2 \cos x + 1 = 0$; $2 \cos x = -1$; $\cos x = -\frac{1}{2}$

Dal 1° fattore

$$\sin 2x = 0 \Rightarrow \sin 2x = \sin 0 = \sin \pi$$

da 1° e 2° membro

$$2x = 0 + 2\pi K; \quad \boxed{x = \pi K} \quad (5)$$

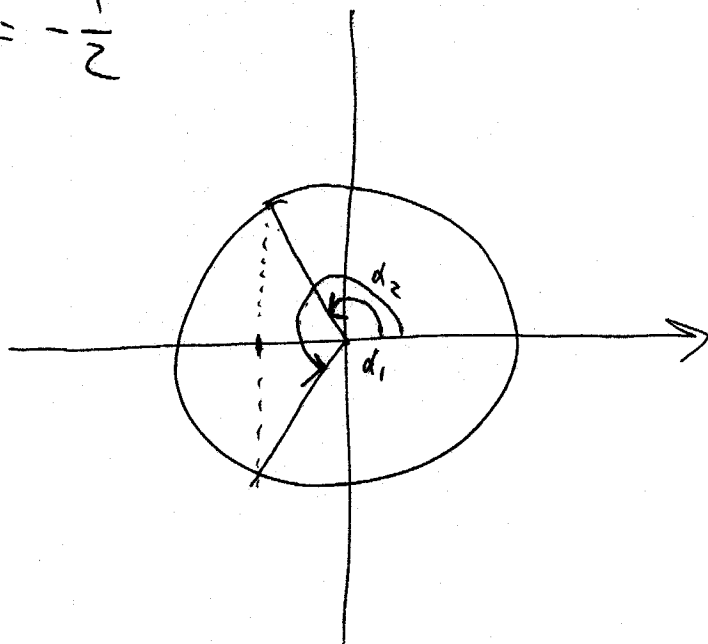
da 1° e 3° membro

$$2x = \pi + 2\pi K; \quad \boxed{x = \frac{\pi}{2} + \pi K} \quad (6)$$

Dal 2° fattore z ho

93

$$\cos x = -\frac{1}{2}$$



Yappiamo che $d_1 = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{3\pi - \pi}{3} = \frac{2}{3}\pi$

$$d_2 = \pi + \frac{\pi}{3} = \frac{3\pi + \pi}{3} = \frac{4}{3}\pi$$

da cui

$$\cos x = \cos \frac{2}{3}\pi = \cos \frac{4}{3}\pi$$

da 1° e 2° z ho

$$x = \frac{2}{3}\pi + k2\pi \quad (7)$$

da 1° e 3° z ho

$$x = \frac{4}{3}\pi + k2\pi \quad (8)$$

Esempio

94

$$\cos nx + \cos(n-2)x - \cos x = 0 \quad (1)$$

applichiamo le formule di prostaferesi al 1° e 2° addendato

$$\cos p + \cos q = 2 \cos \frac{p+q}{2} \cdot \cos \frac{p-q}{2} \quad (2)$$

$$p = nx \quad ; \quad q = (n-2)x \quad (3)$$

da (1)

$$2 \cos \frac{nx + (n-2)x}{2} \cdot \cos \frac{nx - (n-2)x}{2} - \cos x = 0 ;$$

$$2 \cos \frac{nx + nx - 2x}{2} \cdot \cos \frac{\cancel{nx} - \cancel{nx} + 2x}{2} - \cos x = 0 ;$$

$$2 \cos \frac{2nx - 2x}{2} \cdot \cos \frac{2x}{2} - \cos x = 0$$

$$2 \cos \frac{2(nx - x)}{2} \cdot \cos x - \cos x = 0$$

$$2 \cos(nx - x) \cdot \cos x - \cos x = 0$$

$$\cos x [2 \cos(nx - x) - 1] = 0 \quad (4)$$

$$1^{\circ} \text{ fattore } \cos x = 0 \quad (5)$$

$$2^{\circ} \text{ fattore } 2 \cos(11x - x) - 1 = 0 \quad (6)$$

dal 1° fattore

$$\cos x = 0 ;$$

$$\cos x = \cos \frac{\pi}{2} = \cos \frac{3}{2} \pi$$

dal 1° e 2° membro

$$x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad (7)$$

dal 1° e 3° membro

$$x = \frac{3}{2} \pi + 112\pi \quad (8)$$

ovviamente le (7) e le (8) possono essere riunite nelle

$$x = \frac{\pi}{2} + 11\pi \quad (9)$$

che 2° fattore

(96)

$$2 \cos(nx - x) - 1 = 0 \quad (10)$$

$$\cos(nx - x) = \frac{1}{2} \quad (11)$$

che mi

$$\cos(nx - x) = \cos \frac{\pi}{3} = \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)$$

che 1° e 2° membro

$$nx - x = \frac{\pi}{3} + k2\pi$$

$$x(n-1) = \frac{\pi}{3} + k2\pi$$

$$x = \frac{\frac{\pi}{3}}{n-1} + \frac{k2\pi}{n-1}$$

$$x = \frac{\pi}{3(n-1)} + \frac{k2\pi}{n-1} \quad (11)$$

che 1° e 3° membro

$$nx - x = -\frac{\pi}{3} + k2\pi$$

$$x(n-1) = -\frac{\pi}{3} + k2\pi$$

$$x = -\frac{\pi}{3(n-1)} + \frac{k2\pi}{n-1} \quad (12)$$

che (11) e che (12) possono essere sintetizzate nelle

$$x = \pm \frac{\pi}{3(n-1)} + \frac{k2\pi}{n-1} \quad (13)$$

Esercizio

97

$$\sqrt{2} \sin x + \sqrt{6} \cos x = 0 \quad (1)$$

dividiamo le (1) per $\cos x$

$$\sqrt{2} \frac{\sin x}{\cos x} + \sqrt{6} \frac{\cos x}{\cos x} = 0;$$

$$\sqrt{2} \tan x + \sqrt{6} = 0 \quad (2)$$

Verifichiamo se $x = \pm \frac{\pi}{2}$ è soluzione

inseriamo $x = \frac{\pi}{2}$ nelle (1)

$$\sqrt{2} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) + \sqrt{6} \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \quad (3)$$

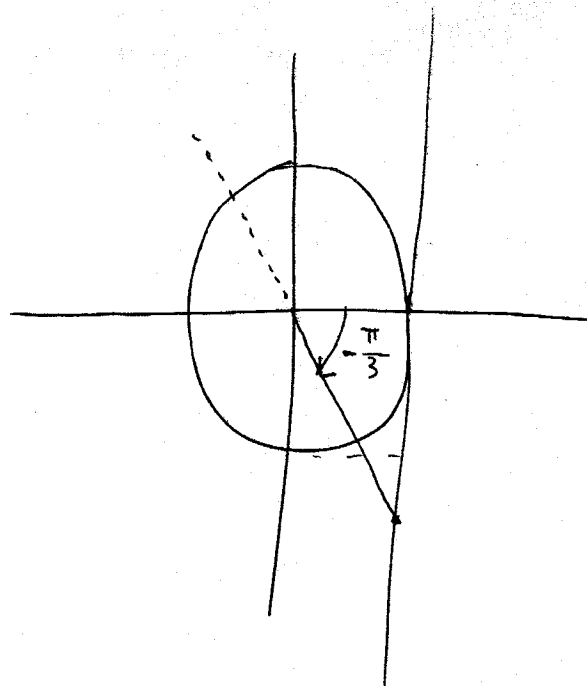
$$\sqrt{2} \cdot 1 + \sqrt{6} \cdot 0 = 0; \quad \sqrt{2} = 0 \text{ (falso) quindi}$$

$x = \pm \frac{\pi}{2} \text{ non è soluzione}$

risolviamo le (2)

$$\sqrt{2} \tan x = -\sqrt{6}; \quad \tan x = -\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}};$$

$$\tan x = -\sqrt{3}$$



$$d_1 = 2\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{6\pi - \pi}{3} = \frac{5}{3}\pi$$

$$x_1 = \frac{5}{3}\pi \text{ è soluzione}$$

$$\boxed{x_1 = \frac{5}{3}\pi + k2\pi} \quad (4)$$

Inoltre $\frac{5}{3}\pi$ è soluzione, implica che

$$x_2 = \frac{5}{3}\pi + \pi + k2\pi$$

$$x_2 = \frac{5\pi + 3\pi}{3} + k2\pi ; \quad x_2 = \frac{8\pi}{3} + k2\pi$$

Visto che $\frac{8\pi}{3}$ supera i 2π tagliamo le misure dell'angolo giro

$$x_2 = \left(\frac{8}{3}\pi - 2\pi\right) + k2\pi ; \quad x_2 = \left(\frac{8\pi - 6\pi}{3}\right) + k2\pi ;$$

$$\boxed{x_2 = \frac{2}{3}\pi + k2\pi} \quad (5)$$

Le (4) e le (5) possono essere riscritte nella (99)

$$x = \frac{2}{3} \pi + k\pi \quad (6)$$

In definitiva le (6) è la soluzione.

Esempio

100

$$3 \sec x = 2 \operatorname{cosec} x \quad (1)$$

Appiamo che

$$\sec x = \frac{1}{\cos x} \quad (2) \quad e$$

$$\operatorname{cosec} x = \frac{1}{\sin x} \quad (3)$$

$$3 \frac{1}{\cos x} = 2 \frac{1}{\sin x} \quad (4)$$

$$\frac{3}{\cos x} = \frac{2}{\sin x} ; \quad 3 \sin x = 2 \cos x ;$$

$$3 \sin x - 2 \cos x = 0 \quad (5)$$

dividiamo la (5) per $\cos x$

$$\frac{3 \sin x}{\cos x} - \frac{2 \cancel{\cos x}}{\cancel{\cos x}} = 0 ; \quad 3 \operatorname{tg} x - 2 = 0 ; \quad 3 \operatorname{tg} x = 2$$

$$\operatorname{tg} x = \frac{2}{3} \quad (6)$$

nelle tabelle dei valori della tangente il valore $\frac{2}{3}$
non c'è per cui applichiamo la funzione $\arctg$ alla (6)

$$x = \arctg \frac{2}{3} \quad (7)$$

$$x = \arctg \frac{2}{3} + k\pi$$

Nelle zanne decimale ha (7) diviene

(101)

$$\alpha = 33,6900675259^\circ$$

Le famiglie delle soluzioni è

$$x = 33,6900675259^\circ + K 180^\circ$$

Avendo ottenuto per $\cos x$ dobbiamo verificare se $x = \frac{\pi}{2}$ è soluzione:

$$\text{dalle (5)} \quad 3 \sin x - 2 \cos x = 0 \quad (5)$$

$$3 \sin \frac{\pi}{2} - 2 \cos \frac{\pi}{2} = 0; \quad 3 \cdot 1 - 2 \cdot 0 = 0; \quad 3 = 0$$

(falso) quindi $x = \frac{\pi}{2}$ NON è soluzione.

Esempio

102

$$3 \sin x + \sqrt{3} \cos x = -\sqrt{3} \quad (1)$$

$$3 \sin x + \sqrt{3} \cos x + \sqrt{3} = 0 \quad (2)$$

riponiamo da $\cos x = \frac{1 - \tan^2 \frac{x}{2}}{1 + \tan^2 \frac{x}{2}} \quad (3)$

$$\sin x = \frac{2 \tan \frac{x}{2}}{1 + \tan^2 \frac{x}{2}} \quad (4)$$

la (1) diventa

$$3 \frac{2 \tan \frac{x}{2}}{1 + \tan^2 \frac{x}{2}} + \sqrt{3} \frac{1 - \tan^2 \frac{x}{2}}{1 + \tan^2 \frac{x}{2}} + \sqrt{3} = 0$$

$$\frac{3(2 \tan \frac{x}{2}) + \sqrt{3}(1 - \tan^2 \frac{x}{2}) + \sqrt{3}(1 + \tan^2 \frac{x}{2})}{1 + \tan^2 \frac{x}{2}} = 0$$

$$6 \tan \frac{x}{2} + \sqrt{3} - \cancel{\sqrt{3} \tan^2 \frac{x}{2}} + \sqrt{3} + \cancel{\sqrt{3} \tan^2 \frac{x}{2}} = 0$$

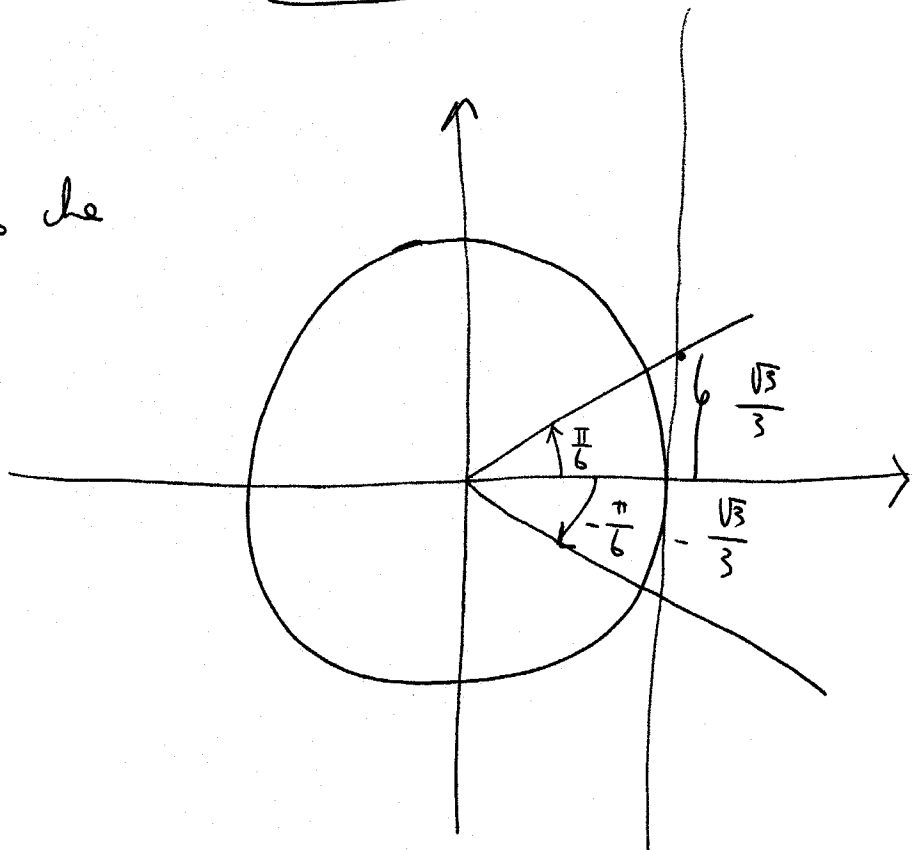
$$6 \tan \frac{x}{2} + 2\sqrt{3} = 0$$

$$3 \operatorname{tg} \frac{x}{2} + \sqrt{3} = 0$$

$$3 \operatorname{tg} \frac{x}{2} = -\sqrt{3};$$

$$\operatorname{tg} \frac{x}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{3} \quad (5)$$

Disegniamo la



$$\operatorname{tg} \left(-\frac{\pi}{6} \right) = -\frac{\sqrt{3}}{3} \quad (6)$$

trasformiamo $\alpha = -\frac{\pi}{6}$ in angolo positivo, cioè facciamo il complementare e 2π

$$-\frac{\pi}{6} = 2\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{12\pi - \pi}{6} = \frac{11}{6} \pi$$

quindi

$$\operatorname{tg} \left(\frac{11}{6} \pi \right) = -\frac{\sqrt{3}}{3} \quad (7)$$

Confrontiamo le (5) e le (7)

104

$$\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right) = \operatorname{tg}\left(\frac{11}{6}\pi\right) ;$$

$$\frac{x}{2} = \frac{11}{6}\pi + K\pi ; \quad x = \frac{2 \cdot 11}{6}\pi + K2\pi ;$$

$$\boxed{x = \frac{11}{3}\pi + K2\pi} \quad (8)$$

Ma il $\frac{11}{3}\pi$ è maggiore dell'angolo giro 2π
sottraiamo 2π da $\frac{11}{3}\pi$

$$\frac{11}{3}\pi - 2\pi = \frac{11\pi - 6\pi}{3} = \frac{5}{3}\pi$$

$$\boxed{x = \frac{5}{3}\pi + K2\pi} \quad (9)$$

Calcoliamo quanti gradi decimali sono $\frac{5}{3}\pi$

$$d^R : 2\pi = d^d : 360$$

$$d^d = \frac{d^R \cdot 360}{2\pi} ; \quad d^d = \frac{\frac{5}{3}\pi \cdot 360}{2\pi} ;$$

$$d^d = \frac{5 \cdot 180}{3} ;$$

$$\boxed{d^d = 300} \quad (10)$$

Quindi

105

(11) $x = 300 + k 2\pi / 80$; è una famiglia di soluzioni.

Le in radianti equivale

$$x = \frac{5}{3} \pi + k 2\pi \quad (12)$$

Visto che le (3) e le (4) non fanno ritorno
se $x = \pi$ è o non è soluzione essendo nelle
formule $\tan \frac{x}{2}$ e come sappiamo se $\frac{x}{2} = \frac{\pi}{2}$
vale $\frac{\pi}{2}$ il valore della tangente è ∞ ,
verifichiamo se $x = \pi$ verifica le (1)

$$3 \sin \pi + \sqrt{3} \cos \pi = -\sqrt{3} ;$$

$$3 \cdot 0 + \sqrt{3} \cdot (-1) = -\sqrt{3} ;$$

$$0 - \sqrt{3} = -\sqrt{3} ; \quad -\sqrt{3} = -\sqrt{3} \Rightarrow$$

$$x = \pi + k 2\pi \text{ è soluzione} \quad (13)$$

In definitiva le (12) e le (13) sono le famiglie di soluzioni

Exemplo

106

$$(2 + \sqrt{3}) \tan x + \cot x + 2 + \sqrt{3} = 0 \quad (1)$$

e.g.l.

$$(2 + \sqrt{3}) \frac{2 \tan \frac{x}{2}}{1 + \tan^2 \frac{x}{2}} + \frac{1 - \tan^2 \frac{x}{2}}{1 + \tan^2 \frac{x}{2}} + 2 + \sqrt{3} = 0$$

$$\frac{(2 + \sqrt{3}) \cdot 2 \tan \frac{x}{2} + 1 - \tan^2 \frac{x}{2} + (2 + \sqrt{3})(1 + \tan^2 \frac{x}{2})}{1 + \tan^2 \frac{x}{2}} = 0$$

$$\frac{(2 + \sqrt{3}) \left(2 \tan \frac{x}{2} + 1 + \tan^2 \frac{x}{2} \right) + 1 - \tan^2 \frac{x}{2}}{1 + \tan^2 \frac{x}{2}} = 0$$

$$\frac{4 \tan \frac{x}{2} + 2 + 2 \tan^2 \frac{x}{2} + 2\sqrt{3} \tan \frac{x}{2} + \sqrt{3} + \sqrt{3} \tan^2 \frac{x}{2} + 1 - \tan^2 \frac{x}{2}}{1 + \tan^2 \frac{x}{2}} = 0$$

$$\frac{\cancel{4 \tan \frac{x}{2}} \tan^2 \frac{x}{2} (2 + \sqrt{3} - 1) + \tan \frac{x}{2} (4 + 2\sqrt{3}) + (2 + \sqrt{3} + 1)}{1 + \tan^2 \frac{x}{2}} = 0$$

$$(1+\sqrt{3})\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} + (4+2\sqrt{3})\operatorname{tg} \frac{x}{2} + (3+\sqrt{3}) = 0$$

$$\operatorname{tg} \frac{x}{2} = \frac{-(4+2\sqrt{3}) \pm \sqrt{(4+2\sqrt{3})^2 - 4(1+\sqrt{3})(3+\sqrt{3})}}{2(1+\sqrt{3})}$$

$$\operatorname{tg} \frac{x}{2} = \frac{-(4+2\sqrt{3}) \pm \sqrt{16+12+16\sqrt{3} - 4(3+\sqrt{3}+3\sqrt{3}+3)}}{2+2\sqrt{3}}$$

$$\operatorname{tg} \frac{x}{2} = \frac{-(4+2\sqrt{3}) \pm \sqrt{28+16\sqrt{3} - 4(6+4\sqrt{3})}}{2+2\sqrt{3}}$$

$$\operatorname{tg} \frac{x}{2} = \frac{-(4+2\sqrt{3}) \pm \sqrt{28+16\sqrt{3} - 24 - 16\sqrt{3}}}{2+2\sqrt{3}}$$

$$\operatorname{tg} \frac{x}{2} = \frac{-(4+2\sqrt{3}) \pm \sqrt{4}}{2+2\sqrt{3}}$$

$$\operatorname{tg} \frac{x}{2} = \frac{-(4+2\sqrt{3}) \pm 2}{2+2\sqrt{3}}$$

$$\operatorname{tg} \frac{x}{2} = \frac{-4 - 2\sqrt{3} \pm 2}{2 + 2\sqrt{3}} =$$

$$= \begin{cases} \frac{-4 - 2\sqrt{3} + 2}{2 + 2\sqrt{3}} = \frac{-2 - 2\sqrt{3}}{2 + 2\sqrt{3}} = \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{-4 - 2\sqrt{3} - 2}{2 + 2\sqrt{3}} = \frac{-6 - 2\sqrt{3}}{2 + 2\sqrt{3}} = \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{-(2 + 2\sqrt{3})}{2 + 2\sqrt{3}} = -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{2(-3 - \sqrt{3})}{2 + 2\sqrt{3}} = \frac{2(-3 - \sqrt{3})}{2(1 + \sqrt{3})} = \frac{-3 - \sqrt{3}}{1 + \sqrt{3}} \end{cases}$$

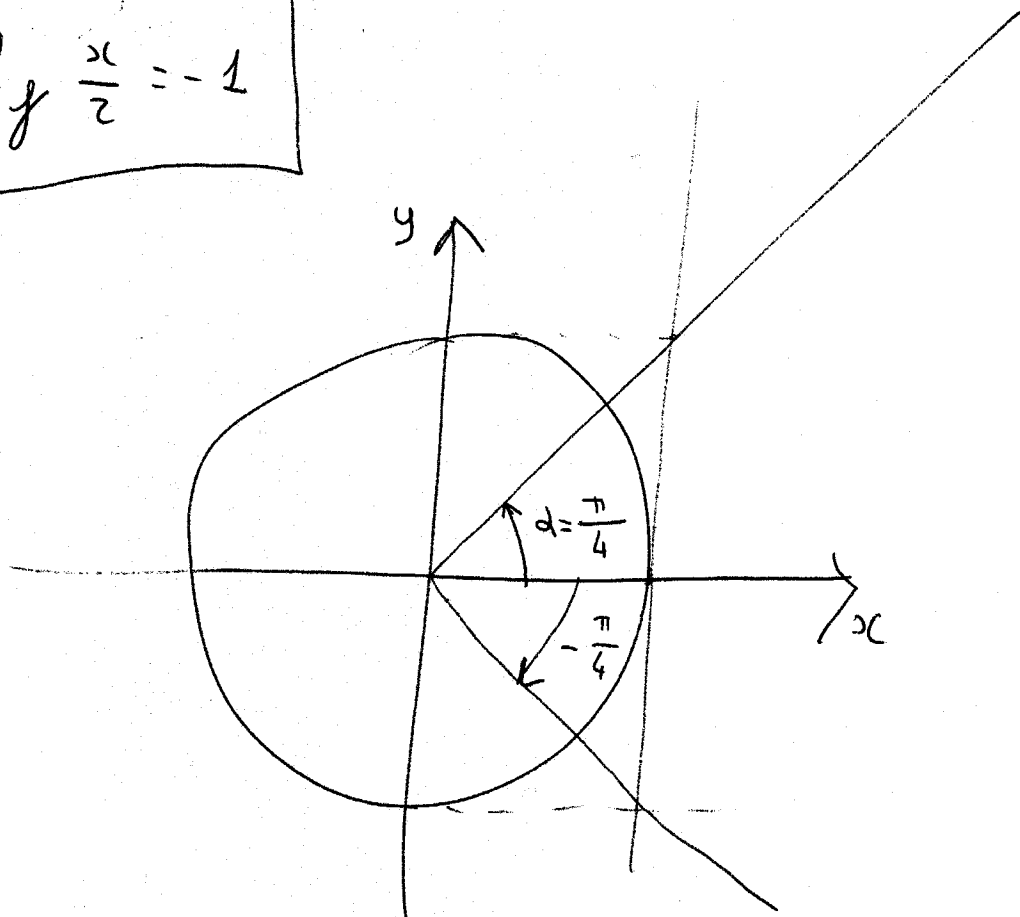
In definitiva

109

$$\operatorname{tg} \frac{x}{2} = -1 \quad \text{e} \quad \operatorname{tg} \frac{x}{2} = \frac{-3 - \sqrt{3}}{1 + \sqrt{3}}$$

Studiamo

$$\operatorname{tg} \frac{x}{2} = -1$$



dalle tabelle sappiamo che $\operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = 1$ da cui

$$\operatorname{tg} \left(-\frac{\pi}{4} \right) = -1$$

per trovare l'angolo in modo positivo facciamo il complementare a 2π

$$-\frac{\pi}{4} = 2\pi - \frac{\pi}{4} = \frac{8\pi - \pi}{4} = \frac{7\pi}{4}$$

da cui

$$\operatorname{tg} \frac{7}{4} \pi = -1$$

$$\operatorname{tg} \frac{x}{2} = \operatorname{tg} \left(\frac{7}{4} \pi \right) = -1 ;$$

$$\frac{x}{2} = \frac{7}{4} \pi + k\pi \quad ; \quad x = 2 \cdot \frac{7}{4} \pi + k 2\pi$$

$$x = \frac{7}{2} \pi + k 2\pi$$

prime famiglie di soluzioni.

Calcoliamo il valore $\frac{7}{2} \pi$ inferiore a 2π

$$\frac{7}{2} \pi - 2\pi = \frac{7\pi - 4\pi}{2} = \frac{3}{2} \pi \quad \text{da cui}$$

$$x = \frac{3}{2} \pi + k 2\pi$$

Prime famiglie di soluzioni.

$$\frac{3}{2} \pi = 270^\circ$$

Lavoriamo con le tecniche zediche

111

$$\operatorname{tg} \frac{x}{2} = \frac{-3 - \sqrt{3}}{1 + \sqrt{3}}$$

$$\operatorname{tg} \frac{x}{2} = \frac{-2 - 1 - \sqrt{3}}{1 + \sqrt{3}} = \frac{-2 - (1 + \sqrt{3})}{1 + \sqrt{3}} =$$

$$= \frac{-2}{1 + \sqrt{3}} - \frac{1 + \sqrt{3}}{1 + \sqrt{3}} = -\frac{2}{1 + \sqrt{3}} - 1 =$$

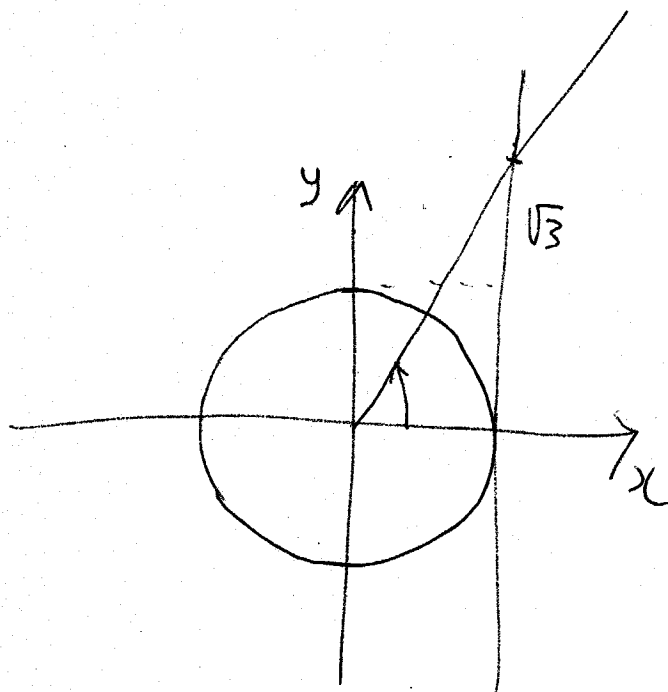
$$= -\frac{2(1 - \sqrt{3})}{(1 + \sqrt{3})(1 - \sqrt{3})} - 1 = -\frac{2 - 2\sqrt{3}}{1 - 3} - 1 =$$

$$= -\frac{2 - 2\sqrt{3}}{-2} - 1 = \frac{2 - 2\sqrt{3}}{2} - 1 =$$

$$= \frac{2(1 - \sqrt{3})}{2} - 1 = 1 - \sqrt{3} - 1 = -\sqrt{3}$$

cioè

$$\boxed{\operatorname{tg} \frac{x}{2} = -\sqrt{3}}$$



dalla tabella sappiamo che

112

$$\operatorname{tg} \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$$

quindi

$$\operatorname{tg} \left(-\frac{\pi}{3} \right) = -\sqrt{3}$$

Esprimiamo l'angolo in notazione positive

$$-\frac{\pi}{3} = 2\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{6\pi - \pi}{3} = \frac{5\pi}{3}$$

quindi

$$\operatorname{tg} \left(\frac{5}{3} \pi \right) = -\sqrt{3}$$

in definitiva

$$\operatorname{tg} \frac{x}{2} = \operatorname{tg} \frac{5}{3} \pi$$

$$\frac{x}{2} = \frac{5}{3} \pi + k\pi ; \quad x = 2 \cdot \frac{5}{3} \pi + k2\pi ;$$

$$x = \frac{10}{3} \pi + k2\pi ; \quad \text{ sottraiamo l'angolo fino a } 2\pi$$

$$\frac{10}{3} \pi - 2\pi = \frac{10\pi - 6\pi}{3} = \frac{4}{3} \pi$$

percento

113

$$x = \frac{4}{3} \pi + K 2\pi$$

è la seconda famiglia
di soluzioni.

Calcoliamo quanti decimali vale $\frac{4}{3} \pi$

$$d^R : 2\pi = d^d : 360;$$

$$\frac{4}{3} \pi : 2\pi = d^d : 360; d^d = \frac{\frac{4}{3} \cancel{\pi} \cdot 360}{2 \cancel{\pi}}$$

$$d^d = \frac{\frac{4 \cdot \overset{120}{\cancel{360}}}{3}}{2} = \frac{\cancel{4} \cdot 120}{\cancel{2}} = 240$$

$$d^d = 240^\circ$$

Visto che 2 tracce di equazioni trigonometriche lineari
(e.g.l.) e nelle tecniche di calcolo abbiamo introdotto
le tangente abbiamo verificato se

$$x = \pi$$

è oppure no soluzione.

Inseriamo nelle tracce $x = \pi$

$$(1) (2 + \sqrt{3}) \sin \pi + \cos \pi + 2 + \sqrt{3} = 0$$

$$(2 + \sqrt{3}) \cdot 0 + (-1) + 2 + \sqrt{3} = 0; -1 + 2 + \sqrt{3} = 0 \text{ (falso)}$$

quindi:

$$x = \pi$$

(114)

non è soluzione.

In definitiva le famiglie delle soluzioni sono:

$$1) \quad x = \frac{3}{2} \pi + k 2\pi \quad \text{cioè} \quad x = 270^\circ + k 360$$

$$2) \quad x = \frac{4}{3} \pi + k 2\pi \quad \text{cioè} \quad x = 240^\circ + k 360$$

$$2 \sin x \cos x = 1 \quad (1) \quad \text{Famiglia (e.g.o.)}$$

Rendiamo le (1) omogenea. Sappiamo che

$$1 = \sin^2 x + \cos^2 x \quad (2)$$

le (1) dividere $2 \sin x \cos x = \sin^2 x + \cos^2 x \quad (3)$

$$\sin^2 x + \cos^2 x - 2 \sin x \cos x = 0 \quad (4)$$

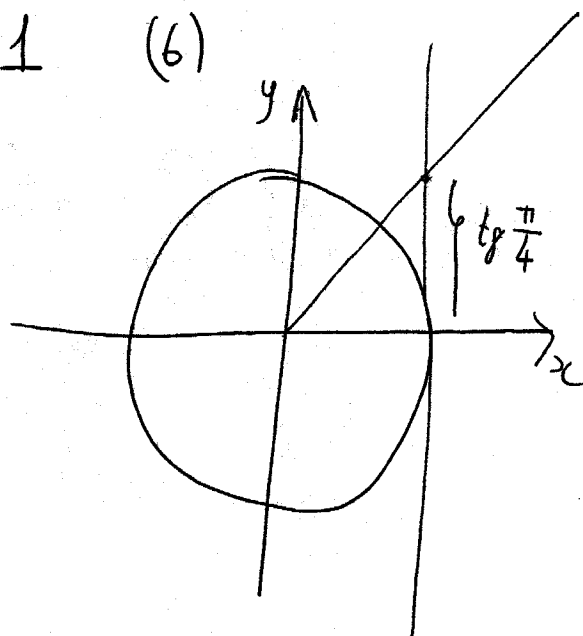
La (4) è equivalente alle (1). Dividiamo le (4) per $\cos^2 x$

$$\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} + \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x} - \frac{2 \sin x \cos x}{\cos^2 x} = 0$$

$$\tan^2 x + 1 - 2 \tan x = 0; \quad \tan^2 x - 2 \tan x + 1 = 0 \quad (5)$$

$$\tan x = \frac{+2 \pm \sqrt{4 - 4(1)(1)}}{2} = \frac{2 \pm 0}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

$$\tan x = 1 \quad (6)$$



della tabella dei valori delle tangente 2° ha

(116)

$$\operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = 1$$

per cui

$$\operatorname{tg} x = \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = 1;$$

$$\boxed{x = \frac{\pi}{4} + K\pi} \quad (7)$$

La (7) rappresenta una famiglia di soluzioni.

In precedenza, nel passaggio dalle (4) alla (5) abbiamo diviso per $\cos^2 x$, quindi postulando la possibilità di soluzione se $x = \frac{\pi}{2}$ è soluzione.

Procediamo alla verifica puntuale inserendo $x = \frac{\pi}{2}$ nelle trece

$$2 \sin \frac{\pi}{2} \cdot \cos \frac{\pi}{2} = 1; \quad 2 \cdot 1 \cdot 0 = 1; \quad 0 = 1 \quad (\text{falso})$$

quindi $x = \frac{\pi}{2}$ NON è soluzione.

In definitiva l'unica famiglia di soluzioni è la (7).

Esempio

117

$$\sin x \cos x + \frac{\sqrt{3}}{4} = 0 \quad (1) \quad \left(\begin{array}{l} \text{simple} \\ \text{e.g.o} \end{array} \right)$$

$$\sin x \cos x + \frac{\sqrt{3}}{4} (\sin^2 x + \cos^2 x) = 0$$

$$\sin x \cos x + \frac{\sqrt{3}}{4} \sin^2 x + \frac{\sqrt{3}}{4} \cos^2 x = 0 \quad (2)$$

dividiamo la (2) per $\cos^2 x$

$$\frac{\sin x \cancel{\cos x}}{\cancel{\cos^2 x}} + \frac{\frac{\sqrt{3}}{4} \sin^2 x}{\cos^2 x} + \frac{\frac{\sqrt{3}}{4} \cancel{\cos^2 x}}{\cancel{\cos^2 x}} = 0 \quad (3)$$

$$\tan x + \frac{\sqrt{3}}{4} \tan^2 x + \frac{\sqrt{3}}{4} = 0$$

$$\frac{\sqrt{3}}{4} \tan^2 x + \tan x + \frac{\sqrt{3}}{4} = 0 \quad (4)$$

$$\frac{\sqrt{3} \tan^2 x + 4 \tan x + \sqrt{3}}{4} = \frac{0}{4} ;$$

$$\sqrt{3} \tan^2 x + 4 \tan x + \sqrt{3} = 0 ;$$

$$\tan x = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 4(\sqrt{3})(\sqrt{3})}}{2\sqrt{3}} = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 12}}{2\sqrt{3}}$$

$$= \frac{-4 \pm 2}{2\sqrt{3}} = \frac{x(-2 \pm 1)}{2\sqrt{3}} =$$

$$= \begin{cases} \frac{-2-1}{\sqrt{3}} = -\frac{3}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = -\sqrt{3} \\ \frac{-2+1}{\sqrt{3}} = \frac{-1}{\sqrt{3}} = -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{cases}$$

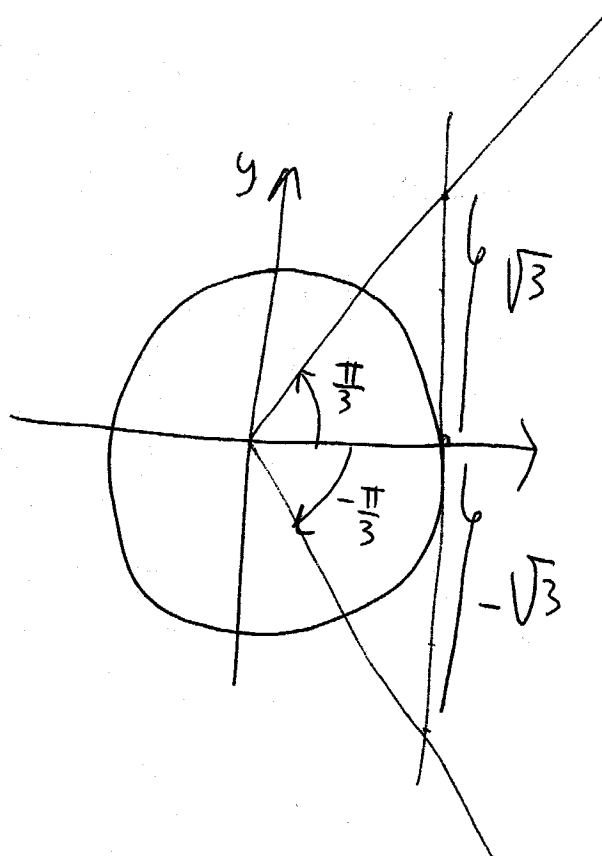
Le soluzioni sono

$$\textcircled{1} \quad \tan x = -\sqrt{3} \quad (5)$$

$$\tan x = -\frac{1}{\sqrt{3}} \quad (6)$$

Risolviemo la (5)

$$\tan x = -\sqrt{3}$$



della tabella dei valori della tangente 2. ha:

(119)

$$\operatorname{tg} \frac{\pi}{3} = \sqrt{3} \quad \text{quindi}$$

$$\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\sqrt{3} \quad (7)$$

$$\operatorname{tg} x = \operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{3}\right) \quad (8)$$

$$x = -\frac{\pi}{3} + k\pi \quad (9)$$

è una famiglia di soluzioni

determiniamo il valore $x = -\frac{\pi}{3}$ in notazione positiva

$$x = 2\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{6\pi - \pi}{3} = \frac{5}{3}\pi$$

$$x = \frac{5}{3}\pi + k\pi \quad (10) \quad \text{Soluzione}$$

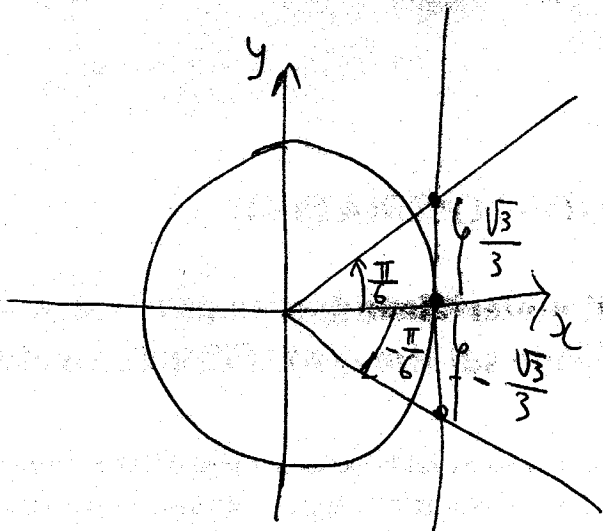
~

Risolviemo la (6)

$$\operatorname{tg} x = -\frac{1}{\sqrt{3}} \quad ; \quad \operatorname{tg} x = -\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\operatorname{tg} x = -\frac{\sqrt{3}}{3} \quad (11)$$

dei valori della tangente ~~che~~ 2. 2a che $\operatorname{tg} \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}$



da cui

$$\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{3} \quad (12)$$

$$\operatorname{tg} x = \operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{6}\right) \quad (13)$$

$$x = -\frac{\pi}{6} + k\pi \quad (14)$$

$$x = 2\pi - \frac{\pi}{6} + k\pi \quad (15)$$

$$x = \frac{12\pi - \pi}{6} + k\pi ; \quad x = \frac{11}{6}\pi + k\pi \quad (16)$$

La (16) è la seconda famiglia di soluzioni.

Visto che nelle (3) abbiamo diviso per $\cos' x$

Verifichiamo se $x = \frac{\pi}{2}$ è soluzione.

Inseriamo $x = \frac{\pi}{2}$ nelle tracce

$$\sin \frac{\pi}{2} \cdot \cos \frac{\pi}{2} + \frac{\sqrt{3}}{4} = 0$$

(121)

$$1 \cdot 0 + \frac{\sqrt{3}}{4} = 0; \quad \frac{\sqrt{3}}{4} = 0 \text{ (falso)}$$

quindi

$$x = \frac{\pi}{2} \text{ Non \u00e9 soluzione}$$

Riassumendo le famiglie di soluzioni sono:

$$1) \quad x = \frac{5}{3} \pi + k\pi$$

$$2) \quad x = \frac{11}{6} \pi + k\pi$$

Esempio

$$\sqrt{3} \tan^2 x - (1 + \sqrt{3}) \tan x \cos x + \cos^2 x = 0 \quad (1) \text{ (e.g. 0)}$$

dividiamo per $\cos^2 x$

$$\frac{\sqrt{3} \tan^2 x}{\cos^2 x} - \frac{(1 + \sqrt{3}) \tan x \cancel{\cos x}}{\cos^2 x} + \frac{\cancel{\cos^2 x}}{\cancel{\cos^2 x}} = 0 \quad (2)$$

$$\sqrt{3} \tan^2 x - (1 + \sqrt{3}) \tan x + 1 = 0 \quad (3)$$

$$\tan x = \frac{(1 + \sqrt{3}) \pm \sqrt{(1 + \sqrt{3})^2 - 4(\sqrt{3})(1)}}{2\sqrt{3}} =$$

$$= \frac{(1 + \sqrt{3}) \pm \sqrt{1 + 3 + 2\sqrt{3} - 4\sqrt{3}}}{2\sqrt{3}} =$$

$$= \frac{(1 + \sqrt{3}) \pm \sqrt{1 + 3 - 2\sqrt{3}}}{2\sqrt{3}} =$$

$$= \frac{(1 + \sqrt{3}) \pm \sqrt{(1 - \sqrt{3})^2}}{2\sqrt{3}} = \frac{(1 + \sqrt{3}) \pm (1 - \sqrt{3})}{2\sqrt{3}} =$$

$$= \frac{(1+\sqrt{3}) \pm (1-\sqrt{3})}{2\sqrt{3}}$$

$$= \begin{cases} \frac{1+\cancel{\sqrt{3}} + 1-\cancel{\sqrt{3}}}{2\sqrt{3}} = \frac{2}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\cancel{1}+\sqrt{3} - \cancel{1}+\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = 1 \end{cases}$$

casē

$$4) \frac{\sqrt{3}}{3} = \operatorname{tg} x$$

$$5) \operatorname{tg} x = 1$$

studiamo la 4) $\operatorname{tg} x = \frac{\sqrt{3}}{3}$

sappiamo che $\operatorname{tg} \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}$, che ci

$$\operatorname{tg} x = \operatorname{tg} \frac{\pi}{6} ; \quad \boxed{x = \frac{\pi}{6} + k\pi} \quad (6)$$

Studiamo la 5) $\operatorname{tg} x = 1$. Sappiamo che

$$\operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = 1 \text{ per cui } \operatorname{tg} x = \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} ; \quad \boxed{x = \frac{\pi}{4} + k\pi} \quad (7)$$

Verifichiamo se $x = \frac{\pi}{2}$ è soluzione

inseriamo $x = \frac{\pi}{2}$ in (1)

$$\sqrt{3} \tan^2 \frac{\pi}{2} - (1 + \sqrt{3}) \tan \frac{\pi}{2} \cdot \cos \frac{\pi}{2} + \cos^2 \frac{\pi}{2} = 0$$

$$\sqrt{3} \cdot 1 - (1 + \sqrt{3}) \cdot 1 \cdot 0 + 0 = 0;$$

$$\sqrt{3} - 0 + 0 = 0; \quad \sqrt{3} = 0 \quad (\text{falso})$$

ciò dimostra che $x = \frac{\pi}{2}$ non è soluzione.

In definitiva le soluzioni sono

$$(6) \quad x = \frac{\pi}{6} + k\pi$$

$$(7) \quad x = \frac{\pi}{4} + k\pi$$

Esempio

125

$$(4 + 2\sqrt{3}) \cdot \sin^2 x - 2 \sin x \cos x = 3 + 2\sqrt{3} \quad (1)$$

La (1) è riconducibile a e.p.o.

moltiplichiamo per $1 = \sin^2 x + \cos^2 x$ il termine noto

$$(4 + 2\sqrt{3}) \cdot \sin^2 x - 2 \sin x \cos x = (3 + 2\sqrt{3})(\sin^2 x + \cos^2 x) \quad (2)$$

$$(4 + 2\sqrt{3}) \cdot \sin^2 x - 2 \sin x \cos x = 3 \sin^2 x + 3 \cos^2 x + 2\sqrt{3} \sin^2 x + 2\sqrt{3} \cos^2 x ;$$

$$\begin{aligned} & \underline{(4 + 2\sqrt{3}) \sin^2 x} - 2 \sin x \cos x - \underline{3 \sin^2 x} - \underline{3 \cos^2 x} - \\ & - \underline{2\sqrt{3} \sin^2 x} - \underline{2\sqrt{3} \cos^2 x} = 0 \end{aligned} \quad (3)$$

$$(\cancel{4 + 2\sqrt{3}} - 3 - \cancel{2\sqrt{3}}) \sin^2 x + \cos^2 x (-3 - 2\sqrt{3}) - 2 \sin x \cos x = 0 \quad (4)$$

$$\sin^2 x - 2 \sin x \cos x - (3 + 2\sqrt{3}) \cos^2 x = 0 \quad (5)$$

dividiamo per $\cos^2 x$

(6)

$$\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} - \frac{2 \sin x \cos x}{\cos^2 x} - \frac{(3 + 2\sqrt{3}) \cos^2 x}{\cos^2 x} = 0$$

$$t^2g^2x - 2t^2gx - (3+2\sqrt{3}) = 0 \quad (7)$$

126

$$t^2g^2x = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4(1)[-(3+2\sqrt{3})]}}{2} =$$

$$= \frac{2 \pm \sqrt{4 + 4(3+2\sqrt{3})}}{2} =$$

$$= \frac{2 \pm \sqrt{4 + 12 + 8\sqrt{3}}}{2} =$$

$$= \frac{2 \pm \sqrt{4(1+3+2\sqrt{3})}}{2} =$$

$$= \frac{2 \pm 2\sqrt{1+3+2\sqrt{3}}}{2} =$$

$$= \frac{\cancel{2} (1 \pm \sqrt{4+2\sqrt{3}})}{\cancel{2}} = 1 \pm \sqrt{4+2\sqrt{3}} =$$

$$= 1 \pm \sqrt{4 + \sqrt{12}} \quad (8)$$

Risolvi il radicale doppio

$$\sqrt{A \pm \sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A + \sqrt{A^2 - B}}{2}} \pm \sqrt{\frac{A - \sqrt{A^2 - B}}{2}}$$

$$\sqrt{4 + \sqrt{12}} = \sqrt{\frac{4 + \sqrt{16 - 12}}{2}} + \sqrt{\frac{4 - \sqrt{16 - 12}}{2}} =$$

$$= \sqrt{\frac{4 + 2}{2}} + \sqrt{\frac{4 - 2}{2}} = \sqrt{3} + 1$$

torriamo alla (8)

$$= 1 \pm (\sqrt{3} + 1) = \begin{cases} 1 + \sqrt{3} + 1 = 2 + \sqrt{3} \\ 1 - \sqrt{3} - 1 = -\sqrt{3} \end{cases}$$

Riassumendo

$$(9) \operatorname{tg} x = 2 + \sqrt{3}$$

$$(10) \operatorname{tg} x = -\sqrt{3}$$

Studiamo la (9)

$\operatorname{tg} x = 2 + \sqrt{3}$; dai valori della tangente si ha

$$\operatorname{tg}\left(\frac{5}{12}\pi\right) = 2 + \sqrt{3} \quad \text{per cui}$$

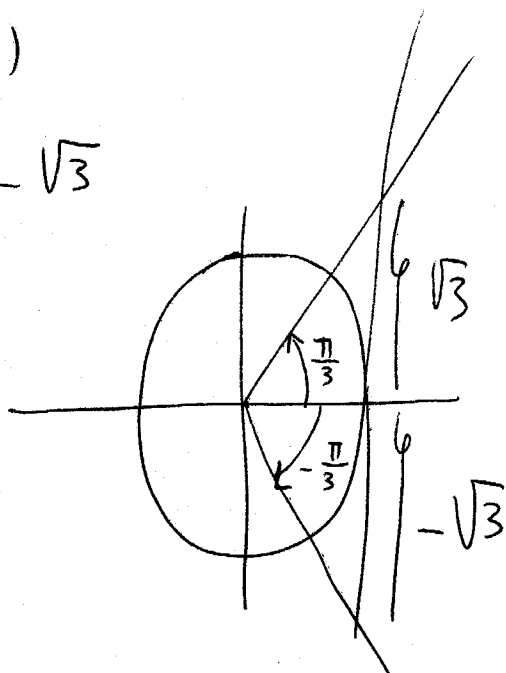
$$\operatorname{tg} x = \operatorname{tg}\left(\frac{5}{12}\pi\right) = 2 + \sqrt{3}$$

$$x = \frac{5}{12}\pi + k\pi \quad 1 \text{ soluzione}$$

(11)

Studiamo la (10)

$$\operatorname{tg} x = -\sqrt{3}$$



Dal grafico si deduce

$$\tan\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\sqrt{3}$$

Yaciamo un modo positivo $\left(-\frac{\pi}{3}\right)$

$$-\frac{\pi}{3} = 2\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{6\pi - \pi}{3} = \frac{5\pi}{3}$$

$$\tan\left(\frac{5\pi}{3}\right) = -\sqrt{3}$$

Da cui

$$\tan x = \tan\left(\frac{5\pi}{3}\right)$$

$$x = \frac{5\pi}{3} + k\pi$$

(12)

2^a
soluzione

Visto che abbiamo ottenuto per $\cos x$ verificiamo se

$$x = \frac{\pi}{2} \text{ è soluzione.}$$

Dalla (1) si ha

$$(4 + 2\sqrt{3}) \cdot \tan^2 \frac{\pi}{2} - 2 \tan \frac{\pi}{2} \cos \frac{\pi}{2} = 3 + 2\sqrt{3}$$

$$(4 + 2\sqrt{3}) \cdot 1 - 2 \cdot 1 \cdot 0 = 3 + 2\sqrt{3}$$

$4 + 2\sqrt{3} = 3 + 2\sqrt{3}$ (falso) quindi $x = \frac{\pi}{2}$ non è soluzione.

In definitiva le soluzioni sono

$$x = \frac{5\pi}{3} + k\pi$$

$$x = \frac{5\pi}{3} + k\pi$$

Esercizio

130

$$7 \sin^2 x - 2\sqrt{3} \sin x \cos x + \cos^2 x = 4 \quad (1)$$

Rendiamola omogenea moltiplicando il termine noto per la relazione fondamentale $1 = \sin^2 x + \cos^2 x$

$$7 \sin^2 x - 2\sqrt{3} \sin x \cos x + \cos^2 x - 4(\sin^2 x + \cos^2 x) = 0 \quad (2)$$

$$\underline{7 \sin^2 x - 2\sqrt{3} \sin x \cos x + \cos^2 x - 4 \sin^2 x - 4 \cos^2 x = 0} \quad (3)$$

$$3 \sin^2 x - 3 \cos^2 x - 2\sqrt{3} \sin x \cos x = 0 \quad (4)$$

dividiamo per $\cos^2 x$

$$\frac{3 \sin^2 x}{\cos^2 x} - \frac{3 \cancel{\cos^2 x}}{\cancel{\cos^2 x}} - \frac{2\sqrt{3} \sin x \cancel{\cos x}}{\cos^2 x} = 0 \quad (5)$$

$$3 \tan^2 x - 2\sqrt{3} \tan x - 3 = 0 \quad (6)$$

$$\tan x = \frac{2\sqrt{3} \pm \sqrt{4 \cdot 3 - 4(3)(-3)}}{6} =$$

$$= \frac{2\sqrt{3} \pm \sqrt{12 + 36}}{6} = \frac{2\sqrt{3} \pm \sqrt{48}}{6} =$$

$$\begin{array}{r} 48 \div 2 \\ 24 \div 2 \\ 12 \div 2 \\ 6 \div 2 \\ 3 \div 3 \\ 1 \end{array}$$

$$48 = 2^4 \cdot 3$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{2\sqrt{3} \pm \sqrt{2^4 \cdot 3}}{6} = \frac{2\sqrt{3} \pm 2^2\sqrt{3}}{6} = \\
 &= \frac{\cancel{2}(\sqrt{3} \pm 2\sqrt{3})}{\cancel{6}_3} = \frac{\sqrt{3} \pm 2\sqrt{3}}{3} = \begin{cases} \frac{\cancel{3}\sqrt{3}}{\cancel{3}} = \sqrt{3} \\ -\frac{\sqrt{3}}{3} \end{cases}
 \end{aligned}$$

Riassumendo:

$$\operatorname{tg} x = \begin{cases} \sqrt{3} \\ -\frac{\sqrt{3}}{3} \end{cases}$$

$$1) \operatorname{tg} x = \sqrt{3}$$

$$2) \operatorname{tg} x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

Per equazioni goniometriche elementari, le abbiamo studiate più volte negli esempi precedenti e ripetitivamente danno soluzioni:

$$\boxed{x_1 = \frac{\pi}{3} + k\pi} \quad 1^{\text{a}} \text{ soluzione}$$

$$\boxed{x_2 = \frac{5}{6}\pi + k\pi} \quad 2^{\text{a}} \text{ soluzione}$$