

Trigonometria

Definizioni principali

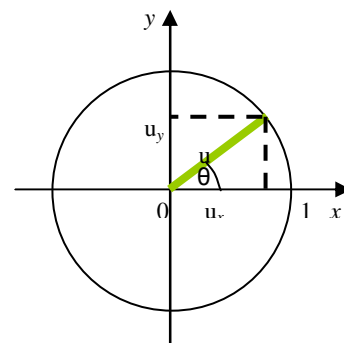
Sia $\mathbf{u}$ un segmento con un estremo nell'origine e l'altro sulla circonferenza con centro nell'origine e raggio 1 (**circonferenza goniometrica**).

$\mathbf{u}$ formi un angolo θ con l'asse x .

Si chiama **coseno** dell'angolo θ , e si indica con **$\cos\theta$** , la lunghezza u_x .

Si chiama **seno** dell'angolo θ , e si indica con **$\sin\theta$** (o $\sin\theta$), la lunghezza u_y .

Si chiama **tangente** dell'angolo θ , e si indica con **$\tan\theta$** , il rapporto $\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$

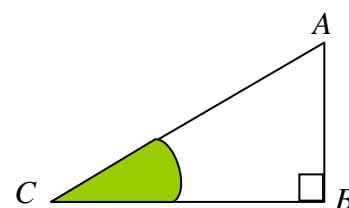


Altre funzioni trigonometriche

Dato un triangolo rettangolo ABC (figura a fianco), risulta:

$$\sin\theta = \frac{\text{cateto opposto a } \theta}{\text{ipotenusa}}$$

$$\cos\theta = \frac{\text{cateto adiacente a } \theta}{\text{ipotenusa}}$$



Si possono definire anche altre funzioni trigonometriche, di minore uso, che sono le reciproche di $\sin\theta$, $\cos\theta$ e $\tan\theta$:

Secante di θ :
$$\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta} = \frac{\text{ipotenusa}}{\text{cateto adiacente a } \theta}$$

Cosecante di θ :
$$\csc\theta = \frac{1}{\sin\theta} = \frac{\text{ipotenusa}}{\text{cateto opposto a } \theta}$$

Cotangente di θ :
$$\cot\theta = \frac{1}{\tan\theta} = \frac{\cos\theta}{\sin\theta} = \frac{\text{cateto adiacente a } \theta}{\text{cateto opposto a } \theta}$$

Proprietà

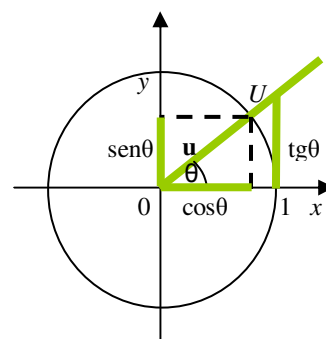
Il segmento $\mathbf{u}$ ha lunghezza 1, qualsiasi sia la posizione del suo punto finale U sulla circonferenza goniometrica, quindi:

- $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$

- $-1 \leq \cos\theta \leq 1$

- $-1 \leq \sin\theta \leq 1$

Poiché $\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$ risulta $-\infty \leq \tan\theta \leq +\infty$

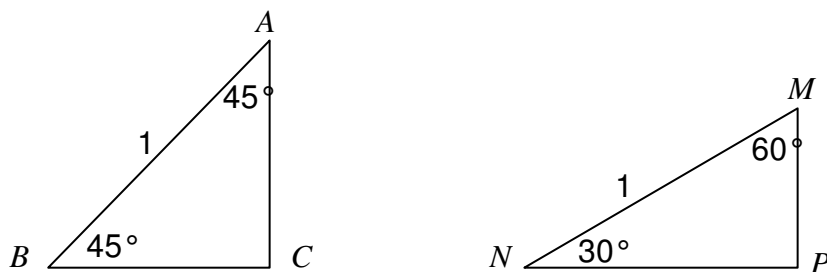


Graficamente

- $\cos\theta$ e $\sin\theta$ sono l'ascissa e l'ordinata di U
- $\tan\theta$ è la lunghezza del segmento di tangente alla circonferenza goniometrica tra l'asse x e la semiretta di $\mathbf{u}$.

Valori degli angoli elementari

Consideriamo i due triangoli rettangoli delle figure seguenti:

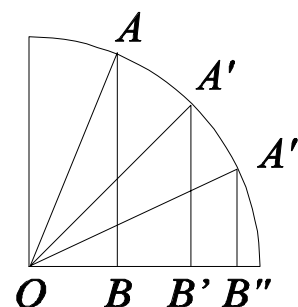


Il primo è mezzo quadrato, il secondo mezzo triangolo equilatero. Poiché l'ipotenusa, in entrambi i casi, vale 1, si ricava:

- $\cos(45^\circ) = \sin(45^\circ) = \frac{\sqrt{2}}{2}$
- $\cos(60^\circ) = \sin(30^\circ) = \frac{1}{2} \quad \cos(30^\circ) = \sin(60^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Altri angoli elementari

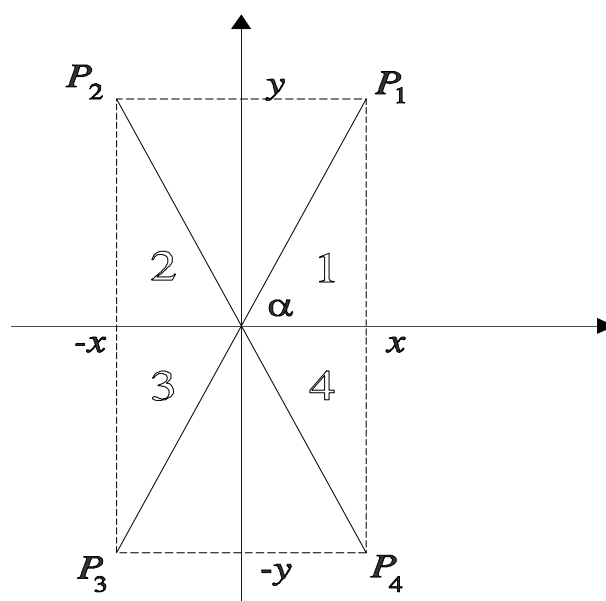
Gli angoli di 60° , 45° e 30° corrispondono ai triangoli OAB , $OA'B'$, $OA''B''$ della figura a fianco e abbiamo visto i valori delle funzioni trigonometriche per tali angoli.



Per calcolare gli altri angoli elementari osserviamo la seconda figura, che presenta i 4 quadranti.

I quattro punti P_k hanno ascisse e ordinate uguali in valore assoluto, dunque i triangoli rettangoli 1, 2, 3, 4 sono congruenti, quindi per calcolare i valori delle funzioni negli altri angoli elementari ci riferiamo al primo quadrante e cambiamo opportunamente i segni:

- Il **seno** di un angolo è:
 - positivo nel I e II quadrante
 - negativo nel III e IV quadrante
- Il **coseno** di un angolo è:
 - positivo nel I e IV quadrante
 - negativo nel II e III quadrante
- la **tangente** di un angolo è
 - positiva nel I e III quadrante
 - negativa nel II e IV quadrante



Curiosità

Il seno e il coseno degli angoli notevoli del I quadrante si possono ricordare facilmente con la regola mnemonica:

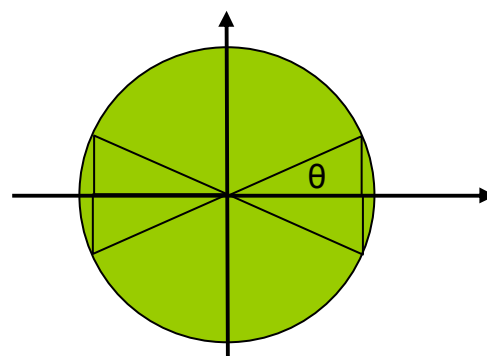
$\sin\theta$	θ	$\cos\theta$
$\frac{\sqrt{0}}{2} = 0$	0	$\frac{\sqrt{4}}{2} = 1$
$\frac{\sqrt{1}}{2} = \frac{1}{2}$	30°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\frac{\sqrt{2}}{2}$	45°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\frac{\sqrt{3}}{2}$	60°	$\frac{\sqrt{1}}{2} = \frac{1}{2}$
$\frac{\sqrt{4}}{2} = 1$	90°	$\frac{\sqrt{0}}{2} = 0$

Periodicità

Sia θ un angolo acuto in un triangolo rettangolo.

Per quanto detto valgono le relazioni:

- $\sin\theta = \cos(90^\circ - \theta)$
- $\cos\theta = \sin(90^\circ - \theta)$
- $\sin\theta = -\sin(-\theta)$
- $\cos\theta = \cos(-\theta)$
- $\sin\theta = \sin(180^\circ - \theta)$
- $\cos\theta = -\cos(180^\circ - \theta)$
- $\sin(90^\circ + \theta) = \sin(180^\circ - (90^\circ + \theta)) = \sin(90^\circ - \theta) = \cos\theta$
- $\cos(90^\circ + \theta) = -\cos(180^\circ - (90^\circ + \theta)) = -\cos(90^\circ - \theta) = -\sin\theta$



Gradi e radianti

Quando il punto finale U del segmento $\mathbf{u}$ di lunghezza 1 si muove sulla circonferenza goniometrica in verso antiorario, aumenta l'angolo α (tra 0 e 360°) e aumenta **di conseguenza** anche la lunghezza dell'arco di circonferenza tra l'asse x e la retta che contiene il segmento $\mathbf{u}$, da 0 a 2π = lunghezza circonferenza.

La misura dell'arco corrisponde a quella dell'angolo: gli angoli sono quindi misurabili anche in **radianti** (rapporto tra la lunghezza dell'arco e quella del raggio della circonferenza).

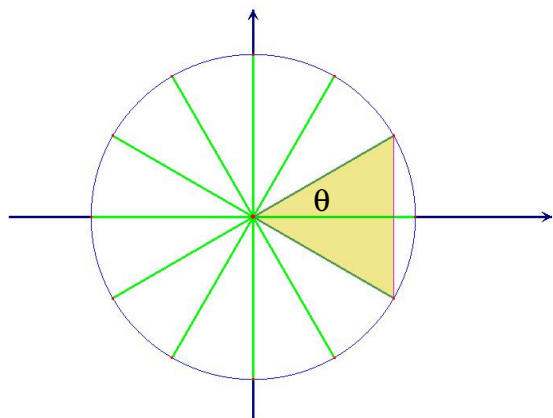
La corrispondenza tra angoli e radianti e il valore delle funzioni trigonometriche degli angoli elementari è data dalla tabella della pagina seguente. Per passare dai gradi ai radianti o viceversa, basta impostare la proporzione:

$$360 : 2\pi = \alpha : x$$

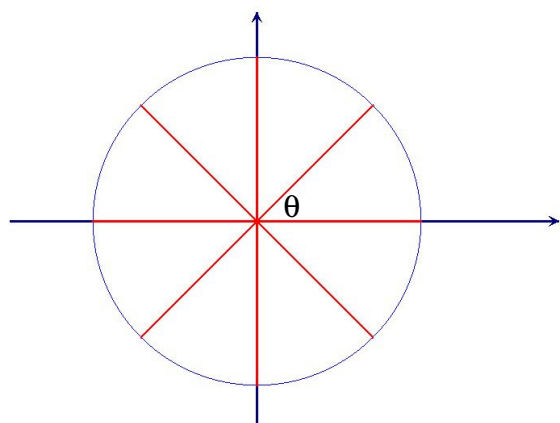
ove α è l'angolo misurato in gradi e x è l'angolo in radianti.

Dalla relazione precedente si ricava $x = \frac{2\pi\alpha}{360}$ oppure $\alpha = \frac{360x}{2\pi}$.

Angoli principali



L'angolo θ della prima figura è di 30° , infatti il triangolo giallo è equilatero; tutti gli altri angoli sono uguali al primo; dalla figura è evidente che misura, in radianti, $\frac{\pi}{6}$



L'angolo θ della seconda figura è di 45° , e tutti gli altri angoli sono uguali al primo, dalla figura è evidente che misura, in radianti, $\frac{\pi}{4}$.

Conversione gradi-radiani e relativa tabella

gradi	Rad.	sen α	cos α	tg α
0°	0	0	1	0
30°	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
45°	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
60°	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$
90°	$\frac{\pi}{2}$	1	0	N.D.
120°	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\sqrt{3}$
135°	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1
150°	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$
180°	π	0	-1	0
210°	$\frac{7\pi}{6}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
225°	$\frac{5\pi}{4}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
240°	$\frac{4\pi}{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$
270°	$\frac{3\pi}{2}$	-1	0	N.D.
300°	$\frac{7\pi}{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\sqrt{3}$
315°	$\frac{7\pi}{4}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1
330°	$\frac{11\pi}{6}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$

Teoremi sui triangoli rettangoli

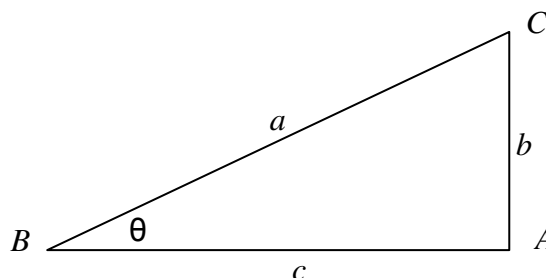
Consideriamo un triangolo rettangolo e sia:

a l'ipotenusa, b e c i cateti. Risulta:

$$\sin\theta = \frac{b}{a}, \cos\theta = \frac{c}{a} \Rightarrow \tan\theta = \frac{b}{c}$$

Per cui $b = a \sin\theta$, $c = a \cos\theta$, $c = b \tan\theta$.

“**Risolvere**” un triangolo rettangolo significa, dati alcuni elementi, ricavare gli altri elementi non conosciuti.



Poiché si parla di triangoli rettangoli, l'angolo retto è dato, poi, per conoscere tutto basta avere **in più**:

- Ipotenusa e un angolo
- un cateto e un angolo
- L'ipotenusa e un cateto
- i due cateti

I due angoli invece non caratterizzano il triangolo, ma solo tutti i triangoli simili.

Teoremi sui triangoli qualsiasi

Dato un triangolo qualsiasi, di lati a , b , c e angoli opposti α , β , γ rispettivamente, valgono i seguenti teoremi:

Teorema dei seni:

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$$

La formula precedente ha un interessante significato geometrico: i tre rapporti rappresentano la lunghezza del diametro del cerchio circoscritto al triangolo.

Teorema del coseno (o di Carnot):

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos\alpha$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos\beta$$

$$c^2 = b^2 + a^2 - 2ba \cos\gamma$$

È chiaramente una generalizzazione del teorema di Pitagora.

Teorema della corda: ogni corda di una circonferenza ha una lunghezza pari al prodotto della misura del diametro per il seno di qualunque angolo alla circonferenza che insista su tale corda.

Teorema dell'area: L'area di un triangolo qualsiasi vale:

$$\frac{1}{2} bc \sin\alpha = \frac{1}{2} ac \sin\beta = \frac{1}{2} ab \sin\gamma$$

Identità e formule trigonometriche

Per ogni angolo θ vale l'identità fondamentale:

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$$

e da questa si ricava che:

$$\cos\theta = \pm\sqrt{1-\sin^2\theta} \quad \text{e} \quad \sin\theta = \pm\sqrt{1-\cos^2\theta}$$

Il doppio segno dipende dal fatto che non si conosce il quadrante in cui cade l'angolo θ .

Presentiamo ora svariate formule che legano tra loro le funzioni trigonometriche.

La loro dimostrazione è abbastanza semplice ed è riportata su ogni libro di matematica delle superiori che preveda la trigonometria.

Formule di addizione e sottrazione:

Dati due angoli qualsiasi θ e φ valgono le seguenti relazioni:

- $\sin(\theta + \varphi) = \sin\theta \cdot \cos\varphi + \cos\theta \cdot \sin\varphi$
- $\cos(\theta + \varphi) = \cos\theta \cdot \cos\varphi - \sin\theta \cdot \sin\varphi$
- $\operatorname{tg}(\theta + \varphi) = \frac{\operatorname{tg}\theta + \operatorname{tg}\varphi}{1 - \operatorname{tg}\theta\operatorname{tg}\varphi}$
- $\sin(\theta - \varphi) = \sin\theta \cdot \cos\varphi - \cos\theta \cdot \sin\varphi$
- $\cos(\theta - \varphi) = \cos\theta \cdot \cos\varphi + \sin\theta \cdot \sin\varphi$
- $\operatorname{tg}(\theta - \varphi) = \frac{\operatorname{tg}\theta - \operatorname{tg}\varphi}{1 + \operatorname{tg}\theta\operatorname{tg}\varphi}$

Formule di duplicazione:

$$\sin(2\theta) = 2\sin\theta\cos\theta$$

- $\cos(2\theta) = \cos^2\theta - \sin^2\theta = 1 - 2\sin^2\theta = 2\cos^2\theta - 1$
- $\operatorname{tg}(2\theta) = \frac{2\operatorname{tg}\theta}{1 - \operatorname{tg}^2\theta}$

Formule di bisezione:

- $\sin\frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}}$
- $\cos\frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}}$
- $\operatorname{tg}\frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}}$

Formule parametriche:

Posto $t = \operatorname{tg}\frac{\theta}{2}$ risulta:

- $\sin\theta = \frac{2t}{1+t^2}$
- $\cos\theta = \frac{1-t^2}{1+t^2}$
- $\operatorname{tg}\theta = \frac{2t}{1-t^2}$

Queste ultime formule legano somme di funzioni trigonometriche con prodotti delle medesime e viceversa:

Formule di prostaferesi:

- $\sin\theta + \sin\varphi = 2\sin\left(\frac{\theta + \varphi}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta - \varphi}{2}\right)$
- $\cos\theta + \cos\varphi = 2\cos\left(\frac{\theta + \varphi}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta - \varphi}{2}\right)$

Formule di Werner (o del prodotto):

- $\cos\theta \cdot \cos\varphi = \frac{1}{2}[\cos(\theta - \varphi) + \cos(\theta + \varphi)]$
- $\sin\theta \cdot \sin\varphi = \frac{1}{2}[\cos(\theta - \varphi) - \cos(\theta + \varphi)]$
- $\sin\theta \cdot \cos\varphi = \frac{1}{2}[\sin(\theta - \varphi) + \sin(\theta + \varphi)]$