

# Trigonometria

---

La parte della matematica che studia i triangoli partendo dai loro angoli.

## Circonferenza trigonometrica

Detta anche circonferenza goniometrica, è una circonferenza con centro nell'origine degli assi e raggio uguale a 1.

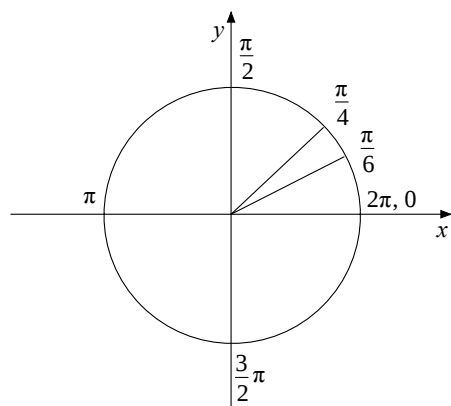
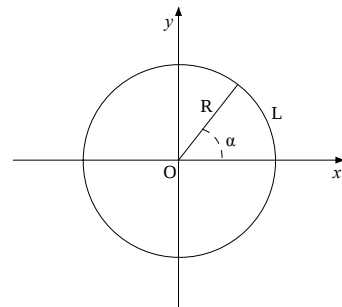
## Radiani

Data una circonferenza di raggio  $R$ , considero un certo angolo  $\alpha$  e indichiamo con  $L$  la lunghezza dell'arco sotteso da  $\alpha$ .

Un radiante è definito dal rapporto fra l'arco sotteso dall'angolo e il raggio:

$$L:2R = \alpha:360^\circ$$

Quindi  $L = \frac{\pi R \alpha}{180^\circ}$  quando l'angolo viene misurato in gradi sessagesimali.



Il radiante si definisce come  $\rho = \frac{L}{R}$ , quindi un radiante equivale all'arco sotteso dall'angolo piatto.

Da notare che il radiante non ha unità di misura, si tratta di un numero puro, dato che è il rapporto tra due valori con la stessa unità di misura.

## Seno e coseno

Preso il punto  $P$  sulla circonferenza trigonometrica corrispondente all'angolo  $\alpha$ :  
 $\alpha = \text{arco} = \text{angolo in rad}$

Il punto ha le coordinate  $(\cos \alpha, \sin \alpha)$  tali che:

$$\cos \alpha = \frac{\overline{PK}}{\overline{OP}}, \quad \sin \alpha = \frac{\overline{PH}}{\overline{OP}}$$

Seno e coseno sono anch'essi numeri puri, senza unità di misura.

## Caratteristiche

1. La funzione seno è dispari
2. La funzione coseno è pari
3. Entrambe le funzioni sono periodiche in  $2\pi$

## Relazioni fondamentali

Prima relazione:

$$\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$$

1. Deriva dal teorema di Pitagora
2. Si può derivare la equazione della circonferenza trigonometrica

Seconda relazione:

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}, \quad \alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

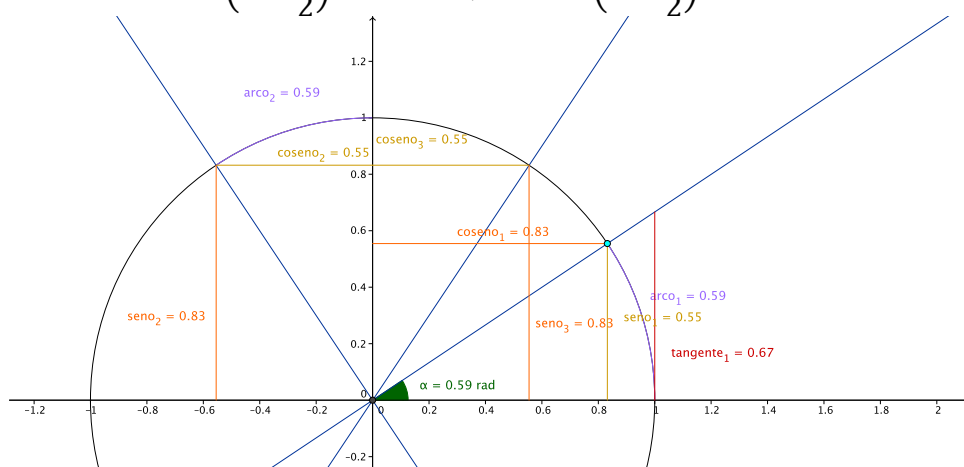
Terza relazione:

$$\cos \alpha = \pm \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 \alpha}}, \quad \alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

## Archi associati

Basta semplicemente vedere gli altri quadranti come il primo ruotato in senso antiorario.

$$\begin{aligned} \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) &= \cos x, & \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) &= -\cos x \\ \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) &= -\sin x, & \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) &= \sin x \end{aligned}$$



## Formule goniometriche

### Formule di addizione e sottrazione

Sono formule che si rivelano particolarmente utili quando si hanno degli angoli di cui non si sa ricavare direttamente il seno e il coseno. Si possono dividere gli angoli e calcolare i valori singolarmente per poi avere la somma.

Nota: sono tutte ricavabili dalla prima.

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta + \sin \alpha \cdot \sin \beta$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta - \cos \alpha \cdot \sin \beta$$

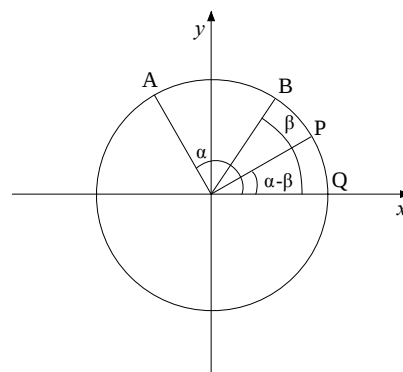
$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \cdot \sin \beta$$

#### *Dimostrazione*

Si considerano  $A, B$  come due punti distinti sulla circonferenza trigonometrica. Si ottiene l'angolo  $\alpha - \beta$  e quindi il punto  $P$ . Dalla geometria euclidea si afferma che per corrispondenti angoli al centro vi sono corrispondenti corde.

Si considerano le corde ( $Q$  è sull'asse  $x$ ):

$$\overline{AB} = \overline{PQ}$$



$$\sqrt{(\cos \alpha - \cos \beta)^2 + (\sin \alpha - \sin \beta)^2} = \sqrt{(\cos(\alpha - \beta) - 1)^2 + (\sin(\alpha - \beta) - 0)^2}$$

Si possono elevare entrambi i membri al quadrato, poi si svolgono i calcoli e si applica  $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$  per semplificare i termini:

$$1 + 1 - 2 \cos \alpha \cos \beta - 2 \sin \alpha \sin \beta = 1 + 1 - 2 \cos(\alpha - \beta)$$

Quindi si ricava la formula di sottrazione che si cercava.

#### *Dimostrazione*

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha - (-\beta)) = \cos \alpha \cdot \cos -\beta + \sin \alpha \cdot \sin -\beta$$

Si ragiona sugli archi associati,  $\cos \beta = \cos -\beta$   $\sin -\beta = -\sin \beta$

$$\sin(\alpha + \beta) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - (\alpha + \beta)\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \cdot \cos \beta + \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \cdot \sin \beta$$

Qui invece si nota che l'angolo complementare  $\frac{\pi}{2} - x$  ha seno e coseno scambiati (è speculare rispetto alla bisettrice),  $\sin x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$   $\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$

### Formule di duplicazione

Si duplica un angolo all'interno della funzione goniometrica.

$$\begin{aligned}\sin 2x &= 2 \sin x \cos x \\ \cos 2x &= 2 \cos^2 x - 1 = 1 - 2 \sin^2 x\end{aligned}$$

#### *Dimostrazione*

$$\sin(2x) = \sin(x+x) = \sin x \cdot \cos x + \cos x \cdot \sin x = 2 \sin x \cos x$$

$$\cos(2x) = \cos x \cdot \cos x + \sin x \cdot \sin x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2 \cos^2 x - 1$$

Formule di bisezione

Si vogliono ricavare le formule di seno e coseno di  $\frac{x}{2}$

$$\sin \frac{x}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos x}{2}}, \quad \cos \frac{x}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos x}{2}}$$

Nota: positivo se e solo se  $0 + 2k\pi < x < \pi + 2k\pi$ , altrimenti negativo.

*Dimostrazione*

$\cos x = \cos\left(2 \cdot \frac{x}{2}\right)$ , da qui si applica la formula di duplicazione e si ottiene un seno al quadrato, si passa tutto al secondo termine e si applica la radice.

### Formule di Prostaferesi

Importanti per provare la continuità delle funzioni seno e coseno, inoltre sono in grado di trasformare somme in prodotti.

In pratica sono una applicazione delle formule di addizione e sottrazione.

$$\begin{aligned}\sin \alpha + \sin \beta &= 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \\ \sin \alpha - \sin \beta &= 2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \\ \cos \alpha + \cos \beta &= 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \\ \cos \alpha - \cos \beta &= -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \sin \frac{\alpha - \beta}{2}\end{aligned}$$

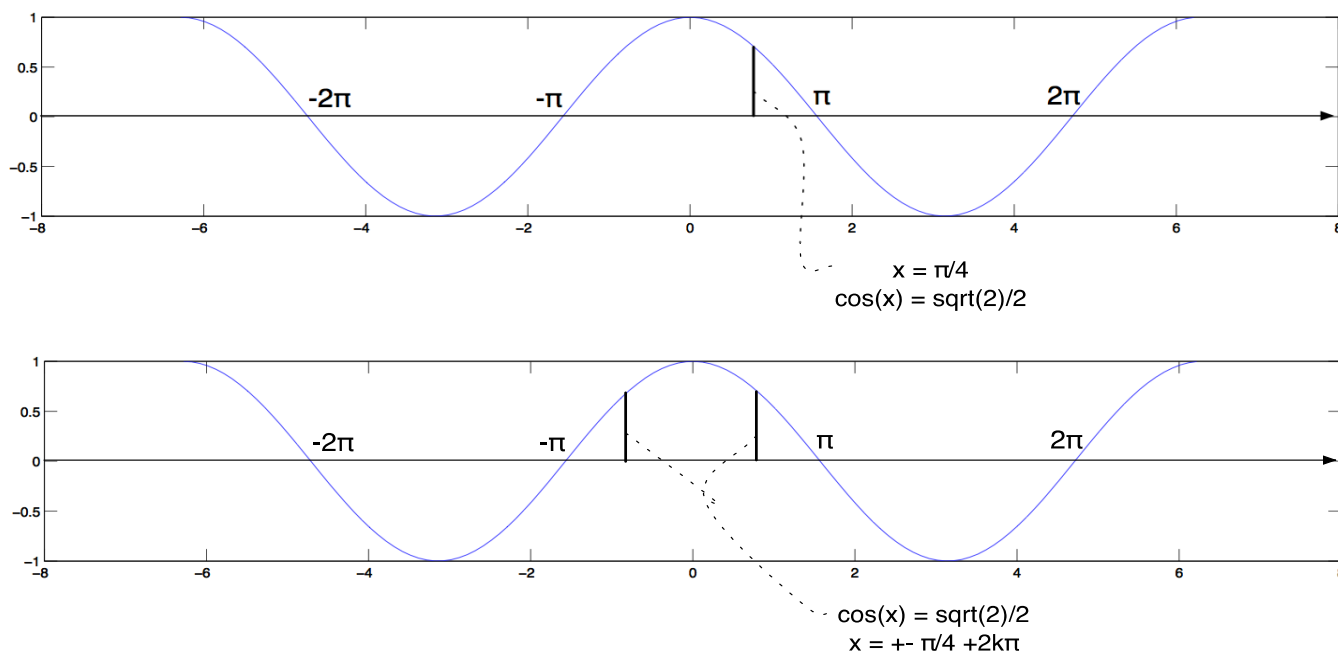
*Dimostrazione*

$$\begin{aligned}1. \quad \sin \alpha &= \sin \left( \frac{\alpha + \beta}{2} + \frac{\alpha - \beta}{2} \right) = \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - \beta}{2} + \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \\ 2. \quad \sin \beta &= \sin \left( \frac{\alpha + \beta}{2} - \frac{\alpha - \beta}{2} \right) = \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - \beta}{2} - \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \\ 3. \quad \cos \alpha &= \cos \left( \frac{\alpha + \beta}{2} + \frac{\alpha - \beta}{2} \right) = \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \sin \frac{\alpha - \beta}{2} - \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \\ 4. \quad \cos \beta &= \cos \left( \frac{\alpha + \beta}{2} - \frac{\alpha - \beta}{2} \right) = \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \sin \frac{\alpha - \beta}{2} + \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - \beta}{2}\end{aligned}$$

A questo punto si possono eseguire le somme 1+2, 1-2, 3+4, 3-4.

## Funzioni inverse

Da notare quando si fanno operazioni inverse, dato che sono funzioni periodiche:



## Equazioni goniometriche elementari

### $\sin \varphi = h$

L'equazione non ha soluzione unica, quindi  $\exists \bar{\vartheta} \in [0, 2\pi] \mid \sin \bar{\vartheta} = h$ , allora:

1.  $-1 \leq h \leq 1$
2.  $\sin(\pi - \bar{\vartheta}) = h$ , anche per l'angolo supplementare vale  $h$
3.  $\sin(\bar{\vartheta} + 2k\pi) = \sin \bar{\vartheta} \cdot \cos 2k\pi + \cos \bar{\vartheta} \cdot \sin 2k\pi = \sin \bar{\vartheta} = h \rightarrow \sin(\pi - \bar{\vartheta} + 2k\pi)$

Ci sono quindi infinite soluzioni al variare di  $k \in \mathbb{Z}$ .

*Osservazione*

$\begin{cases} \sin \vartheta = \sin \varphi \\ \cos \vartheta = \cos \varphi \end{cases}$ , la prima risulta quindi  $\vartheta = \varphi + 2k\pi \vee \vartheta = \pi - \varphi + 2k\pi$

Le soluzioni del sistema sono  $\vartheta = \varphi + 2k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , perché solo la prima soluzione trovata nella prima equazione è anche soluzione della seconda.

### $\cos \varphi = h$

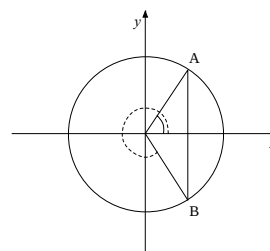
Come il primo caso, non ha soluzione unica,  $\exists \bar{\vartheta} \in [0, 2\pi] \mid \cos \bar{\vartheta} = h$ , quindi:

1.  $-1 \leq h \leq 1$
2.  $\cos(2\pi - \bar{\vartheta}) = h$
3.  $\cos(\bar{\vartheta} + 2k\pi) = \cos \bar{\vartheta} \cdot \cos 2k\pi - \sin \bar{\vartheta} \cdot \sin 2k\pi = \cos \bar{\vartheta} = h \rightarrow \cos(2\pi - (\bar{\vartheta} + 2k\pi))$

### $\tan \varphi = h$

Stessa cosa,  $\exists \bar{\vartheta} \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \mid \tan \bar{\vartheta} = h$ , quindi:

1.  $h \in \mathbb{R}$



$$2. \quad \tan(\alpha + \beta) = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha + \beta)} = \frac{\sin \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \cdot \sin \beta}{\cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta} = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta}$$

$$3. \quad \tan(\vartheta + k\pi) = \frac{\tan \vartheta + \tan k\pi}{1 - \tan \vartheta \tan k\pi} = \tan \vartheta = h$$

### Metodi risoluzione

Si consideri la equazione  $\sin x + \sqrt{3} \cos x - 1 = 0$  (equazione lineare goniometrica), si può risolvere in tre diversi modi.

Equazione parametrica

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad t = \tan \frac{x}{2}$$

$$\frac{2t}{1+t^2} + \frac{\sqrt{3}(1-t^2)}{1+t^2} = 0 \Rightarrow (-\sqrt{3}-1)t^2 + 2t + \sqrt{3}-1 = 0$$

$$\frac{\Delta}{4} = 1 - \sqrt{3} - 1(\sqrt{3}-1) = 3$$

$$t_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{3}}{-\sqrt{3}-1} = [1, \sqrt{3}-2]$$

$$\tan \frac{x}{2} = 1 \vee \tan \frac{x}{2} = \sqrt{3}-2$$

$$x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \vee x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi$$

### Grafico

$$\sin x = Y, \cos x = X$$

$$\begin{cases} y + \sqrt{3}x - 1 = 0, & \text{equazione retta} \\ x^2 + y^2 = 1, & \text{equazione circ. trig.} \end{cases}$$

Lo si vede come la intersezione di una retta con la circonferenza trigonometrica, e i punti coincidono con le soluzioni.

$$x = 0 \vee x = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \cos x = 0 \vee \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \vee x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi$$

### Angolo aggiunto

$$a \cdot \sin x + b \cdot \cos x \text{ lo si vuole trasformare } A \cdot \sin(x + \varphi), \quad A = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad \tan \varphi = \frac{b}{a}$$

$$A = \sqrt{1+3} = 2, \quad \tan \varphi = \sqrt{3}, \quad \varphi = \frac{\pi}{3} \text{ (no } + 2k\pi)$$

$$\Rightarrow 2 \cdot \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) - 1 = 0 \text{ (lo si applica alla formula)}$$

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} \Rightarrow x + \frac{\pi}{3} = \pi \pm \frac{\pi}{6} + 2k\pi \text{ (elimina la funz. seno euguagliandone due)}$$

$$x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \vee x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi$$

### Equazioni definite in un intervallo

In questo caso bisogna calcolare ogni singola possibilità e smettere in una direzione quando iniziano a diventare non accettabili. Per esempio, dato  $2k\pi$  si calcola il valore della equazione per  $k = 0$ ,  $k = 1$  e così via finchè la soluzione non risulta fuori dall'intervallo, poi si procede nell'altra direzione,  $k = -1$ ,  $k = -2 \dots$

Eliminare funzioni da equazione

Per risolvere le equazioni goniometriche, spesso è utile eliminare le funzioni all'interno, come seno o coseno. Per fare ciò bisogna avere la stessa funzione prima e dopo il segno

di uguale, in modo da poter ricavare l'intersezione tra due funzioni, si semplificano aggiungendo opportunamente la periodicità (per esempio  $2k\pi$ ).  
Quando le funzioni non sono uguali si applicano gli archi associati o altre regole per trasformarle.

### Equazioni omogenee

$$a \cdot \sin^2 x + b \cdot \sin x \cdot \cos x + c \cdot \cos^2 x = 0, \quad a, b, c \neq 0$$

È una equazione omogenea di secondo grado e contiene seno e coseno della stessa variabile con lo stesso esponente. Per risolverla si divide tutto per  $\cos^2 x$  (vedi esempio).

Esempio

$$\sin^2 x - 2 \sin x \cos x + \cos^2 x = 0$$

Si divide quindi tutto per  $\cos^2 x$ :

$$\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} - \frac{2 \sin x \cancel{\cos x}}{\cos^2 x} + \frac{\cancel{\cos^2 x}}{\cos^2 x} = 0$$

Si pone come condizione che  $\cos x \neq 0$ , quindi si risolve:

$$\tan^2 x - 2 \tan x + 1 = 0 \Rightarrow \tan x = 1 \pm \sqrt{1 - 1} = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi$$

## Coordinate polari

È un altro modo di indicare un punto nel piano.

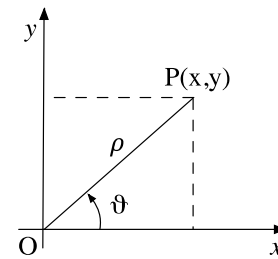
Preso un punto  $P \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0,0\}$ , se conosciamo  $\rho = \overline{OP}$  e conosciamo  $\vartheta$  che è l'angolo orientato misurato in senso antiorario formato dal segmento  $\overline{OP}$  con il semiasse positivo dell'ascissa, allora:

$$\begin{cases} x = \rho \cdot \cos \vartheta \\ y = \rho \cdot \sin \vartheta \end{cases}$$

Ricavare da coordinate cartesiane

Per trovare la distanza, il calcolo è immediato (teorema di Pitagora):

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$$



Più delicata invece la questione per trovare l'angolo  $\vartheta$ :

$$\frac{\sin \vartheta}{\cos \vartheta} = \frac{y}{x} \Rightarrow \tan \vartheta \rightarrow f \text{ inversa} \rightarrow \arctan \frac{y}{x}$$

Ma bisogna considerare singolarmente ogni caso:

$$\begin{cases} \arctan \frac{y}{x}, & x > 0 \\ \arctan \frac{y}{x} + \pi, & x < 0 \\ \frac{\pi}{2}, & x = 0 \wedge y > 0 \\ \frac{3}{2}\pi, & x = 0 \wedge y < 0 \end{cases}$$

Gli ultimi due casi sono perché altrimenti  $\frac{y}{x}$  perderebbe di significato.