

QPSK

Mc128k

Si vuole calcolare la probabilità di errore di un canale di trasmissione.

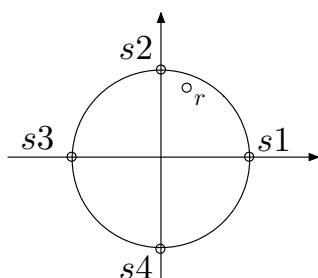


Figura 1: Diagramma delle fasi

Il segnale ricevuto è uguale a quello trasmesso più un contributo di rumore gaussiano N , che è interpretabile come una variabile aleatoria:

$$R = S + N \quad (0.1)$$

Ipotizzando di trasmettere il simbolo $s2$, la somma della realizzazione della variabile aleatoria N farà in modo di spostarlo fino a raggiungere r :

$$r = s2 + n \quad (0.2)$$

L'obiettivo è quello di progettare un algoritmo che possa riconoscere quale simbolo è stato trasmesso, quindi dato r deve "decidere" se si trattava di $s2$ oppure qualcos altro; bisogna quindi selezionare un indice i che rappresenti il simbolo più probabile a posteriori (criterio MAP):

$$i = \operatorname{argmax} P\{S = sj|R = r\}, \quad j = 1 \dots 4 \quad (0.3)$$

Viene quindi applicata la formula di Bayes per calcolare la probabilità che un simbolo sia uguale a quello scelto sj dato che la realizzazione è r :

$$P\{S = sj|R = r\} = \frac{P\{R = r|S = sj\} \cdot P\{S = sj\}}{P\{R = r\}} \quad (0.4)$$

La variabile S è discreta, mentre R è continua, dato che viene influenzata da un rumore gaussiano. Si ha quindi una variabile mista, e il coefficiente i è quindi dato da:

$$i = \operatorname{argmax} \frac{f_R(r|S = sj) \cdot P\{S = sj\}}{f_R(r)} \quad (0.5)$$

$$P\{S = sj\} = \frac{1}{4} \forall j \quad (0.6)$$

Se si sta minimizzando la risposta a j , $f_R(r)$ è ininfluyente, quindi si rimuove, ottenendo:

$$i = \operatorname{argmax}_j f_R(r|S = sj) \quad (0.7)$$

R è quindi dato da $sj + N$, risulta essere una variabile aleatoria gaussiana con media sj e varianza N_0 .

La formula della gaussiana è formata da una parte esponenziale negativa:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi N_0}} e^{-\frac{|r-sj|^2}{2N_0}} \quad (0.8)$$

Di conseguenza le realizzazioni sono singoli eventi denotati in fig.??, dove la esponenziale maggiore passa argmax.

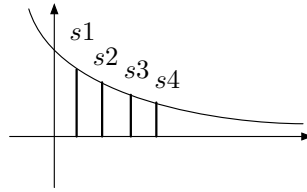


Figura 2: Eventi per probabilità

A questo punto si tratta solo di trovare il minimo fra 4 quadrati:

$$= \operatorname{argmax} \frac{|r - sj|^2}{2N_0} \quad (0.9)$$

$$= \operatorname{argmax} |r - sj| \quad (0.10)$$

In conclusione, la variabile aleatoria del rumore in un istante è gaussiana AWGN (Additive White Gaussian Noise) e sposta i punti ricevuti nel piano. Il punto con la distanza minore dal simbolo che si cerca è quello più probabile.

Per distinguere a quale simbolo la realizzazione ricevuta corrisponde, si confronta con tutti i casi in modo individuale (quindi $s1$ con $s2$, $s1$ con $s3$, ecc...), ottenendo alla fine una divisione del piano che distingue uno spazio in cui deve ricadere un simbolo ricevuto per appartenere a quello che si cerca.