

2.18 La variabile casuale $z = g(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ funzione di due variabili casuali

LEZIONE
20

Date due v.c. $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ e una funzione $g(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ formiamo la v.c.

$$z = g(\mathbf{x}, \mathbf{y})$$

Vediamo come si possono esprimere le statistiche di z in termini delle statistiche congiunte di $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ e di $g(\mathbf{x}, \mathbf{y})$.

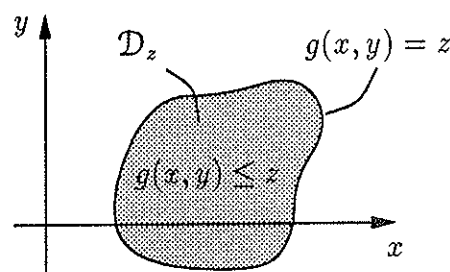
Dato un numero reale z , indichiamo con $\mathcal{D}_z$ quella regione del piano xy tale che $g(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq z$ (vedi figura).

Evidentemente si ha:

$$\{z \leq z\} = \{g(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq z\} = \{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathcal{D}_z\}$$

e perciò la $F_z(z)$ si ottiene così:

$$\begin{aligned} F_z(z) &= P\{z \leq z\} = P\{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathcal{D}_z\} \\ &= \int \int_{\mathcal{D}_z} f_{\mathbf{xy}}(x, y) dx dy \end{aligned}$$



Si osservi che

- se cambia z cambia $\mathcal{D}_z$
- per determinare $F_z(z)$ è necessario trovare la regione $\mathcal{D}_z$ per ogni z e calcolare l'integrale.

Per la densità $f_z(z)$ si fa la derivata di $F_z(z)$ rispetto a z

$$f_z(z) = \frac{d}{dz} F_z(z)$$

2.18 - La variabile casuale $z = g(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ funzione di due variabili casuali 76

Vediamo ora tre applicazioni importanti.

Esempio:

$$z = \mathbf{x} + \mathbf{y}$$

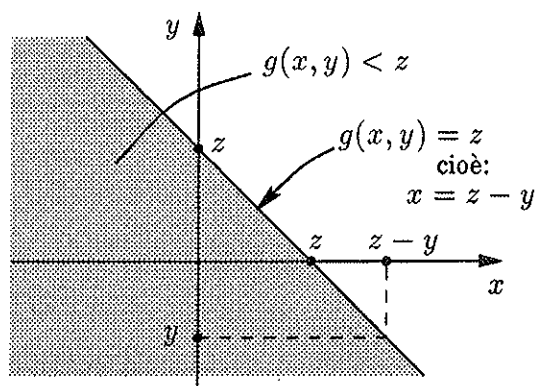
cioè

$$g(x, y) = x + y$$

$$F_z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{z-y} f_{\mathbf{xy}}(x, y) dx dy$$

Deriviamo rispetto a z :

$$f_z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{\mathbf{xy}}(z - y, y) dy$$



Se $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ sono indipendenti:

$$f_{\mathbf{xy}}(x, y) = f_{\mathbf{x}}(x) f_{\mathbf{y}}(y)$$

e quindi

$$f_z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{\mathbf{x}}(z - y) f_{\mathbf{y}}(y) dy$$

La densità della somma è la convoluzione delle densità $f_{\mathbf{x}}(y) * f_{\mathbf{y}}(y)$.

Esempio:

$$z = \max(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \quad \text{cioè} \quad g(x, y) = \max(x, y)$$

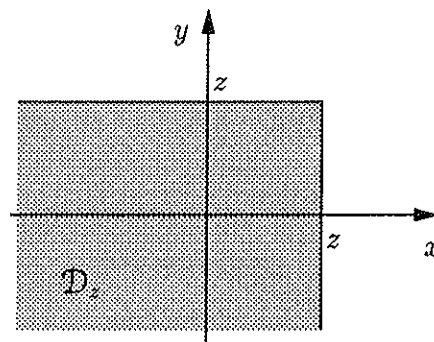
Qual è la regione per cui $\max(x, y) \leq z$?

Fissato z si trova

$$\begin{aligned} F_z(z) &= P\{z \leq z\} = P\{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathcal{D}_z\} \\ &= P\{\mathbf{x} \leq z, \mathbf{y} \leq z\} = F_{\mathbf{xy}}(z, z) \end{aligned}$$

In sintesi

$$F_z(z) = F_{\mathbf{xy}}(z, z)$$



Se $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ sono indipendenti $F_{\mathbf{xy}}(z, z) = F_{\mathbf{x}}(z) F_{\mathbf{y}}(z)$ e quindi

$$f_z(z) = f_{\mathbf{x}}(z) F_{\mathbf{y}}(z) + F_{\mathbf{x}}(z) f_{\mathbf{y}}(z)$$

Esempio:

$$\mathbf{w} = \min(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \quad \text{cioè} \quad g(x, y) = \min(x, y)$$

Qual è la regione per cui $\min(x, y) \leq w$?

Fissato w si trova

$$\begin{aligned} F_{\mathbf{w}}(w) &= P\{\mathbf{w} \leq w\} = P\{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathcal{D}_w\} \\ &= P\{\mathbf{x} \leq w, \mathbf{y} \text{ qualsiasi}\} + P\{\mathbf{x} > w, \mathbf{y} \leq w\} \\ &= F_{\mathbf{x}}(w) + [P\{\mathbf{y} \leq w\} - P\{\mathbf{x} \leq w, \mathbf{y} \leq w\}] \\ &= F_{\mathbf{x}}(w) + F_{\mathbf{y}}(w) - F_{\mathbf{xy}}(w, w) \end{aligned}$$

