

Il teorema del limite centrale.

Si consideri una sequenza di variabili aleatorie continue e indipendenti $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ con rispettive densità di probabilità $f_i(x)$ aventi valori medi e varianze (finiti):

$$E\{X_i\} = \eta_i \quad \text{Var}\{X_i\} = \sigma_i^2$$

Si consideri quindi la somma di n di tali variabili ossia la v.a. X :

$$X = X_1 + X_2 + \dots + X_n$$

La media η e la varianza σ^2 di X sono quindi date dalle seguenti (le varianze si sommano perché le v.a. sono indipendenti e quindi incorrelate: dimostrare per esercizio con due v.a. o vedere il testo Bononi, Ferrari, Eq (12.13), p. 408) :

$$\eta = \eta_1 + \dots + \eta_n \quad \sigma^2 = \sigma_1^2 + \dots + \sigma_n^2$$

e la sua densità di probabilità dalla seguente:

$$f(x) = f_1(x) * f_2(x) * \dots * f_n(x)$$

Il teorema del limite centrale afferma che, sotto certe condizioni molto generali, al crescere di n $f(x)$ tende ad una densità normale $\mathcal{N}(\eta, \sigma)$ ossia:

$$f(x) \cong \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\eta)^2}{2\sigma^2}}$$

La dimostrazione è omessa.

Il teorema del limite centrale può essere introdotto indipendentemente da ogni considerazione probabilistica, può infatti essere pensato come una proprietà della convoluzione di un gran numero di funzioni positive.

Se le densità non sono troppo disperse intorno al valor medio la curva normale risulta essere una buona approssimazione di una gaussiana anche per valori di n non troppo elevati. Ciò si può facilmente verificare sommando tre variabili aleatorie uniformi nell'intervallo $(0, T)$: si veda il testo Bononi, Ferrari, Esempio 10.4, p. 314 e in particolare la parte finale e la fig. 10.14.

Si può anche dimostrare che *l'indipendenza non è necessaria per la sussistenza del teorema*.

Versioni estese del teorema giustificano l'osservazione sperimentale che moltissime grandezze fisiche che provengono dalla somma di un gran numero di variabili aleatorie *di dimensione comparabile* (cioè nessuna di esse domina sulle altre) presentano una distribuzione gaussiana. Tale distribuzione è anche detta normale perché è una distribuzione che frequentemente (*normalmente*) si trova in natura.