

Teoria della probabilità e variabili aleatorie

Testi di problemi assegnati in varie prove scritte **(Lotto 1A, 8/11/14)**

Quesito A7 1/7/11

Dati due eventi qualunque A e B di uno spazio campione S si scriva l'espressione della probabilità dell'evento congiunto $P(A \cup B)$ e si dimostri la validità di tale espressione.

Quesito A21 18/2/11

Si enunci e si dimostri il Teorema delle probabilità totali (o Teorema della probabilità totale).

Quesito A75 16/11/13

Dato uno spazio campione S :

- a) Si enuncino gli assiomi della probabilità.
- b) Dato un evento M in S avente probabilità $P(M) \neq 0$ si enuncino nuovamente gli assiomi utilizzando le probabilità condizionate ad M e si dimostri che sono ancora validi.

Quesito A14 2/12/10

Una commissione di cinque persone viene formata scegliendone a caso i membri da un gruppo di cinque uomini e dieci donne. Si calcoli la probabilità che la commissione risulti formata da due uomini e tre donne.

Quesito A44 2/7/12

Si enunci e si dimostri la “regola della catena” (in generale) e la si utilizzi per risolvere il seguente problema.

Si hanno tre porte chiuse marcate A , B , C e una scatola con 5 chiavi apparentemente identiche, di cui due aprono la porta A , una apre la porta B e due aprono la porta C . Si vogliono aprire le porte A , B e C nell'ordine, scegliendo le chiavi a caso senza rimetterle nella scatola.

Si calcoli la probabilità di aprire le tre porte con un solo tentativo ciascuna (ossia con tre tentativi in totale).

Quesito A59 21/1/13

Dovete aprire una porta la cui unica chiave è in un gruppo di 60 chiavi suddivise in tre mazzi di 20 chiavi ciascuno, apparentemente identici.

Scegliete un mazzo a caso e iniziate a provare le chiavi in successione casuale escludendo via via quelle già provate.

Se le prime sei chiavi non aprono la porta qual è la probabilità che la chiave non sia nel mazzo scelto?

Quesito A10 13/9/11

Si hanno a disposizione cinque monete truccate in modo tale che la probabilità che esca testa lanciando la i -esima moneta sia $i/5$.

Si sceglie a caso una moneta, la si lancia ed esce testa: qual è la probabilità che la moneta lanciata sia la numero 2 ?

Quesito A48 11/9/12

Una scatola contiene due dadi, di cui uno regolare ed uno truccato in modo che la probabilità di ottenere la faccia f_1 sia $P(f_1) = 3/8$ e la probabilità di ottenere una delle altre facce sia $P(f_i) = 1/8$ per $i = 2, 3, 4, 5, 6$.

Si estrae un dado a caso e lo si lancia una volta: se esce la faccia f_1 si dichiara che il dado è truccato, se esce una qualunque delle altre facce si dichiara che il dado non è truccato.

Si trovi la probabilità che la dichiarazione sia errata.

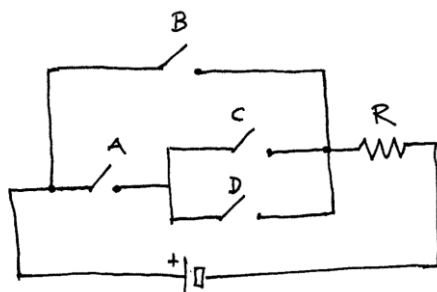
Quesito A83 24/1/14 (SR 29, p. 107)

Un gruppo è formato da dieci persone: quattro di Modena e sei di Parma. Una persona del gruppo scrive il nome della propria città. Si sceglie a caso una lettera della parola così scritta che risulta essere una vocale. Qual è la probabilità che la persona che ha scritto sia di Parma?

Quesito A66 12/06/13

Nel circuito in figura gli interruttori A, B, C, D hanno probabilità $1/2$ di essere aperti (stato 0, ramo interrotto) o chiusi (stato 1, continuità elettrica sul ramo), indipendentemente uno dall'altro.

Spendo che nella resistenza R circola corrente si calcoli la probabilità che l'interruttore C sia chiuso ($C = 1$).

**Quesito A67** 01/07/13

Da un normale mazzo di 52 carte da gioco viene tolta una carta a caso senza guardarla.

Dal mazzo così ridotto si scoprono n carte in successione e si osserva che fra queste non c'è l'asso di picche.

- Si scriva, in funzione di n , la probabilità che la carta mancante sia proprio l'asso di picche.
- Si dica quante carte si devono scoprire senza trovare l'asso di picche (ossia quale debba essere il valore di n) affinché la probabilità che la carta mancante sia proprio l'asso di picche sia uguale a $1/2$.

Quesito A81 16/11/13

Marco e un gruppo di sette amici, in tutto quattro ragazze e quattro ragazzi, si incontrano per una cena. Il tavolo per la cena è tondo e i posti sono numerati. Il gruppo decide di assegnare i posti a caso estraendo ciascuno il numero del proprio posto. Si calcolino le seguenti probabilità:

- P_A : che Marco abbia ai lati due ragazzi;
- P_B : che Marco abbia ai lati un ragazzo e una ragazza;
- P_C : che Marco abbia ai lati due ragazze.

Quesito A15 2/12/10

In un certo lotto di personal computer (PC) l'1% è difettoso. I PC vengono sottoposti ad un test che rivela i difetti nel 98% dei casi in cui difetti sono presenti e indica presenza di difetti nel 3% dei casi in cui il PC non è difettoso. Quanto vale la probabilità che un PC sia: a) difettoso se non passa il test (ossia se il test rivela difetti); b) non difettoso se passa il test (ossia se il test non rivela difetti)?

Nello svolgimento si utilizzino i seguenti simboli per i corrispondenti eventi: $R = \{\text{il test rivela difetti}\}$ e $D = \{\text{il PC è difettoso}\}$.

Quesito A53

23/11/12

Il sig. Rossi teme di avere una certa malattia, pertanto si sottopone a un test diagnostico che ha le seguenti caratteristiche:

$$P(R^c | M) = 10^{-2} \quad (\text{Prob. di falso negativo})$$

$$P(R | M^c) = 6 \cdot 10^{-2} \quad (\text{Prob. di falso positivo})$$

dove R ed M sono i seguenti eventi:

$R = \{\text{Il test rivela presenza di malattia}\}$ (ossia il test è positivo)

$M = \{\text{La malattia è presente}\}.$

Il test del sig. Rossi risulta positivo, ma il medico curante lo rassicura: “Sì, il test è positivo, ma nonostante ciò lei ha l’80% di probabilità di essere sano”.

2a) Si calcoli la probabilità che un individuo scelto a caso fra la popolazione sia affetto dalla malattia (ovvero l’incidenza della malattia sulla popolazione).

[*Facoltativo*: alla luce del risultato si commenti l’affermazione del medico, apparentemente paradossale.]

2b) Per sicurezza il test viene ripetuto (in modo indipendente) e il risultato è nuovamente positivo.

Qual è la probabilità che il sig. Rossi sia effettivamente malato dato il doppio test positivo?

Quesito A36

Un'agenzia di viaggi porta comitive di turisti in visita prima a Roma e poi a Firenze.

Una comitiva si dichiara sufficientemente soddisfatta se trova bel tempo in almeno una delle due città.

Sapendo che la probabilità che a Firenze si trovi bel tempo se a Roma si è trovato brutto tempo è 0,4 e che il 90% delle comitive si dichiarano sufficientemente soddisfatte, qual è la probabilità che una comitiva trovi bel tempo a Roma?

Si usino le seguenti definizioni di eventi: $R = \{\text{Bel tempo a Roma}\}$; $F = \{\text{Bel tempo a Firenze}\}$;

$S = \{\text{Comitiva sufficientemente soddisfatta}\}.$