

Teoria della probabilità e variabili aleatorie

Testi di problemi assegnati in varie prove scritte (Lotto 3A, 28/11/14)

Quesito A2 18/2/11

Un componente in garanzia viene sostituito gratuitamente se si guasta entro un anno dall'acquisto. Se il tempo di guasto del componente è una variabile aleatoria esponenziale negativa con valore medio 5 anni (ovvero di parametro $\lambda = 1/5$), quant'è la probabilità che su un lotto di 20 componenti ne debbano essere sostituiti in un anno 2 o più?

Quesito A4 17/6/11

Un bastoncino lungo 10 cm viene spezzato in due parti scegliendo a caso il punto di rottura.
- Quanto vale la probabilità che il pezzo di sinistra sia più lungo di 4 cm e quello di destra più lungo di 5 cm?
- I due eventi sono indipendenti?

Quesito A11 13/9/11

Si piazzano a caso e in modo indipendente cinque punti nell'intervallo $[0, 10]$ dell'asse reale. Si calcoli la probabilità che nell'intervallo $[0, 2]$ cadano:
a) due soli punti;
b) almeno due punti.

Quesito A20

La vita di un certo tipo di lampade è rappresentata da una v.a. X con densità di probabilità $f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x} u(x)$. Due di tali lampade vengono accese contemporaneamente in una stanza. Si calcoli la probabilità che: a) all'istante generico t_0 le lampade siano entrambe accese; b) all'istante t_0 siano entrambe spente; c) le lampade siano entrambe accese osservando che all'istante t_0 nella stanza c'è luce.

Quesito A24

Si hanno 5 bastoncini lunghi 10 cm. Su ciascuno di essi si sceglie (in modo indipendente) un punto a caso e si spezza il bastoncino in quel punto. Si calcoli la probabilità che due soli dei 10 pezzi risultanti abbiano lunghezza minore di 3 cm.

Quesito A28 22/5/00

Una variabile casuale X ha densità di probabilità $f_X(x)$ come in Figura A28. Si dica quanto vale a .
Si trovi la funzione di distribuzione $F_X(x)$ tracciandone un grafico accurato.
Si dica quanto vale $F_X(12)$.

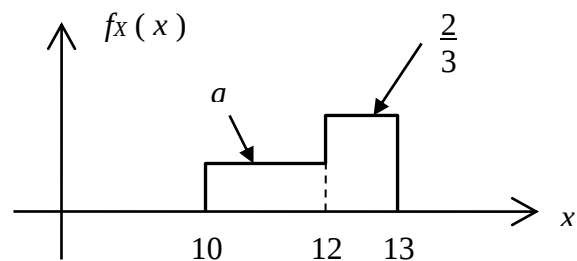


Figura A28

Quesito A30 11/11/11

Un certo tipo di sfere ha diametro che è una variabile aleatoria D uniforme fra 1 e 4 cm. Avete bisogno di tre sfere di diametro compreso fra 2 e 3 cm.
- Qual è la probabilità che dobbiate misurare almeno 10 sfere per trovare le tre desiderate?
- Definita la v.a. $N = \{\text{numero di sfere da misurare per ottenere le tre desiderate}\}$, si trovi la distribuzione di probabilità della variabile N , ossia la probabilità $P\{N = n\}$ per ogni n , e se ne tracci

un grafico accurato per $n \leq 5$. (Alternativamente si tracci un grafico della funzione di distribuzione (CDF) o della densità di probabilità (PDF) della variabile N vista come continua).

Quesito A37

13/02/12

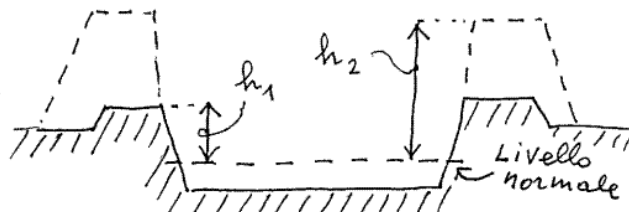
Il livello massimo che un certo fiume raggiunge in un anno (misurato in metri oltre il livello normale del fiume) è una v.a. X con densità di probabilità:

$$f_X(x) = a(x-10)^4 \prod\left(\frac{x-5}{10}\right)$$

Esiste un argine alto $h_1 = 2$ m (rispetto al livello normale del fiume) quindi se X supera tale livello si verifica un'alluvione.

- Si trovi la funzione di distribuzione $F_X(x)$ di X e si trovi il valore della costante a .
- Si calcoli la probabilità che si abbiano una o più alluvioni in 6 anni.
- Poiché il rischio di alluvioni è ritenuto troppo elevato si vuole innalzare l'argine in modo che la probabilità di non avere alluvioni in 50 anni sia 0,9. Quale deve essere la nuova altezza h_2 dell'argine?

{Si assuma che si verifichi una sola piena all'anno e che il livello massimo raggiunto sia indipendente da un anno all'altro}.



Quesito A39

Dato un gruppo di $n = 100$ persone formato da italiani e stranieri si scelgono a caso due persone. Sapendo che la probabilità che una sola di esse sia straniera è $p \approx 0,18$ si individui una possibile composizione del gruppo (numero di italiani n_I e numero di stranieri n_S).

Quesito A52

23/11/12

Si risponda alle seguenti domande di teoria.

- 1a) Si dica cos'è una partizione dello spazio ambiente.
- 1b) Si enunci e si dimostri il teorema della probabilità totale.
- 1c) Si dimostri che la funzione di distribuzione di una v.a. è non decrescente.

Quesito A90

21/07/14

Un'azienda ha due impianti, A e B, che producono motori dello stesso tipo. L'impianto A produce il 3% di motori difettosi e l'impianto B l'1%. Si sceglie a caso un lotto di 100 motori tutti prodotti dallo stesso impianto e si trova che 3 di essi sono difettosi.

Qual è la probabilità che il lotto provenga dall'impianto A? E quale dall'impianto B?

Quesito A100

22/11/14 (1^a pp di TSA)

Sia X (variabile aleatoria) l'ascissa di un punto scelto a caso nell'intervallo $[0,1]$.

Si calcoli la probabilità (in funzione di a) che entrambe le parti in cui risulta così suddiviso l'intervallo siano di lunghezza minore di a (con $0 < a < 1$).

Si trovi, se esiste, un valore di a per cui gli eventi $E_1 = \{X < a\}$ e $E_2 = \{X > (1-a)\}$ siano indipendenti.