

Teoria della probabilità e variabili aleatorie

Testi di problemi assegnati in varie prove scritte
(Lotto 5A, 13/12/14)

Quesito A3 18/2/2011

Sono disponibili sei contenitori cilindrici con superficie di base di 1 dm^2 . Due di questi sono alti 6 cm e quattro sono alti 15 cm. Si sceglie a caso un contenitore e vi si versa una quantità di liquido che è una variabile aleatoria X uniformemente distribuita fra 0 e 1 litro.

Si trovi la densità di probabilità della variabile aleatoria $Y = \{\text{livello raggiunto dal liquido nel contenitore}\}$.

Quesito A9 1/7/2011

Una variabile aleatoria Y è ottenuta da una variabile aleatoria X mediante la trasformazione $Y = g(X)$. La densità di probabilità $f_X(x)$ e la funzione $y = g(x)$ siano le seguenti:

$$f_X(x) = \begin{cases} a & \text{per } -1/2 < x < 3/2 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases} \quad \text{e} \quad g(x) = \Lambda(x) = (1 - |x|) \cdot \Pi(x/2) .$$

- Si dica quale deve essere il valore di a .
- Si tracci un grafico di $g(x)$
- Si trovi l'espressione della densità $f_Y(y)$ e se ne tracci un grafico.

Quesito A12 13/09/2011

La quantità di denaro che il sig. Rossi ha in tasca quando si ferma a rifornire di benzina la sua auto è una variabile aleatoria X (supposta continua) uniformemente distribuita fra 0 e 200 euro.

Il sig. Rossi ha l'abitudine di comportarsi così:

- se in tasca ha più di 60 euro mette 30 euro di benzina;
- se ha meno di 60 euro (o 60 euro) mette una quantità di benzina corrispondente alla metà dei soldi che ha in tasca.

Si trovi la densità di probabilità della v.a. $Y = \{\text{Quantità di denaro che il sig. Rossi ha in tasca dopo un generico rifornimento}\}$.

(N.B. – Si ipotizza che occorranne sempre più di 30 euro per raggiungere il pieno).

Quesito A16 2/12/2010

Una variabile aleatoria X ha densità di probabilità uniforme con valor medio η_X e varianza σ_X^2 .

Si individuino gli estremi a e b dell'intervallo di valori che la variabile può assumere.

Si calcoli la probabilità $P\{\eta_X - \sigma_X < X < \eta_X + \sigma_X\}$ ossia la probabilità che la v.a. assuma valori che si discostano dal valor medio meno di una deviazione standard.

Una volta trovata la probabilità richiesta si verifichi che con i dati del problema risulta verificata la disuguaglianza di Chebychev.

Quesito A17 2/12/2010

Su un segmento lungo 10 cm si sceglie un punto a caso. Si trovi la densità di probabilità della v.a. $Y = \{\text{area del rettangolo avente per lati le due parti del segmento}\}$.

Quesito A23 18/2/2011

1) Si scriva l'espressione analitica della densità di probabilità di una variabile aleatoria gaussiana X con valor medio η_X e varianza σ_X^2 , ossia una v.a. $\mathcal{N}(\eta_X, \sigma_X^2)$.

2) Si consideri la v.a. Y ottenuta dalla precedente mediante la trasformazione $Y = c(X + d)$ con c e d costanti reali. Si dimostri che Y è ancora gaussiana e se ne trovino il valor medio e la varianza η_Y, σ_Y^2 espressi in termini di η_X, σ_X^2, c e d .

3) Si trovino i valori di c e d , se esistono, che rendano la v.a. Y una v.a. $\mathcal{N}(0, 1)$.

Quesito A33 16/01/12

Si sceglie a caso un punto di ascissa X nell'intervallo $(0,1)$. Le lunghezze dei due segmenti in cui risulta suddiviso l'intervallo siano rispettivamente la parte reale e il coefficiente della parte immaginaria di un numero complesso Z .

Si trovi la densità di probabilità della v.a. $Y = \{\text{modulo quadro di } Z\} = |Z|^2$ e se ne tracci un grafico.

Quesito A45 2/7/12

La velocità con cui gli atleti di un certo gruppo corrono i cento metri (velocità supposta costante durante tutta la gara) è una v.a. X uniformemente distribuita fra 9 e 10 m/s.

Si trovi la densità di probabilità $f_Y(y)$ della v.a. $Y = \text{"tempo impiegato a correre i cento metri da un atleta di tale gruppo"}$.

Si organizza una gara (di cento metri) con 6 di tali atleti scelti a caso dal gruppo. Qual è la probabilità che il 1° e il 2° classificato arrivino al traguardo in meno di $t_0 = 10,4$ s e tutti gli altri arrivino in un tempo maggiore di t_0 ?

Quesito A49 11/9/12

La v.a. X è uniforme nell'intervallo $(0, a)$. La v.a. Y è ottenuta dalla X mediante la trasformazione $Y = g(X)$ dove:

$$g(x) = \begin{cases} x & \text{per } 0 \leq x \leq a/4 \text{ e per } 3a/4 \leq x \leq a \\ a/2 & \text{per } a/4 < x < 3a/4 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

Si tracci un grafico di $g(x)$.

Si determinino la funzione di distribuzione $F_Y(y)$ (CDF) e la densità di probabilità $f_Y(y)$ (PDF) di Y .

Quesito A56 21/1/13

Sia X una v.a. uniformemente distribuita fra a e b , con $0 < a < b$.

a) Si trovi la densità di probabilità della variabile $Y = c \cdot \sqrt[3]{X}$, con $c > 0$, e se ne tracci un grafico.

b) Si trovi il valor medio della variabile Y .

Quesito A85

Una variabile aleatoria Y è ottenuta da una variabile aleatoria X mediante la trasformazione

$$Y = e^X$$

a) Si trovi la densità di probabilità $f_Y(y)$ della v.a. Y sapendo che la densità della X è la seguente:

$$f_X(x) = 2e^{-2x} u(x)$$

b) Si trovi il valor medio della v.a. Y senza usare la densità $f_Y(y)$ trovata al punto precedente.

Quesito A87

Un autonoleggio dispone di tre auto apparentemente identiche ma con consumi leggermente diversi, come segue: auto A: 9,5 km/litro; auto B: 10 km/litro; auto C: 10,5 km/litro.

Un cliente che deve percorrere 310 km sceglie un'auto a caso e la rifornisce con 30 litri di benzina (da zero). Dopo 290 km l'auto marcia ancora: qual è la probabilità che il cliente raggiunga la meta senza rimanere a secco?

(Si indichi con X la v.a. "chilometri percorsi quando l'auto rimane a secco").