

Teoria della probabilità e variabili aleatorie

Testi di problemi assegnati in varie prove scritte
(Lotto 4A, 6/12/14)

Quesito A6 17/6/11

Il sig. Rossi ha l'abitudine di entrare ogni giorno del bar B1 o nel bar B2 (scelto a caso) in un istante a caso fra le 10 e le 11 e di intrattenervisi esattamente 10 min per prendere un caffè. Un giorno il sig. Bianchi entra nel bar B1 alle 10:30 e osserva che il sig. Rossi non c'è.

- E' più probabile che il sig. Rossi sia già uscito o che non sia mai entrato? (Si assuma indipendenza fra gli eventi "scelta del bar" e "istante di entrata del sig. Rossi").

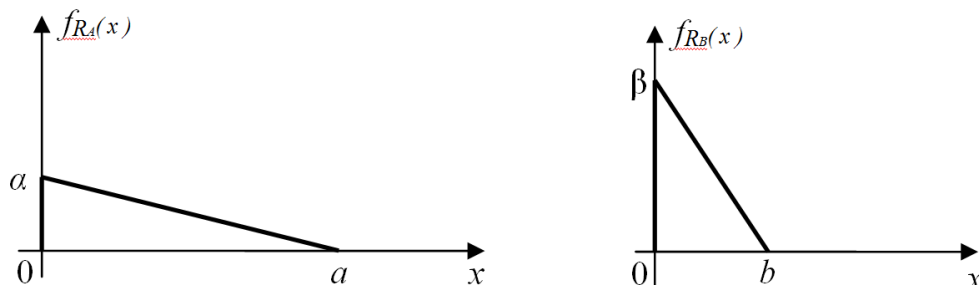
Quesito A18 2/12/10

La durata di una conversazione telefonica è una v.a. con funzione di distribuzione

$F_X(x) = (1 - e^{-\lambda x}) u(x)$. Quanto vale la probabilità che una telefonata in atto all'istante t_0 termini entro i successivi t secondi?

Quesito A31 11/11/11

Una ditta di spedizioni recapita quotidianamente un plico alla vostra ditta. Gli addetti alla consegna sono il sig. A e il sig. B che si alternano casualmente e indipendentemente ma con probabilità diverse $p_A = P(A)$ e $p_B = P(B)$. La consegna dovrebbe avvenire alle ore 10.00 ma gli addetti si presentano con un ritardo che per ciascuno è una v.a. R_A e R_B , rispettivamente, con densità di probabilità come in figura.



- Si trovi il valor medio delle v.a. R_A , R_B (ritardi dei rispettivi addetti) e della v.a. $R = \{\text{ritardo di consegna in un giorno qualunque}\}$.
- Un certo giorno vi avvertono che il corriere è appena arrivato e voi valutate che in quel momento le probabilità che l'addetto arrivato sia A e quella che l'addetto sia B sono uguali: che ore sono? (Si esprima tale ora trovando il ritardo r e sommandolo alle ore 10.00).
- Successivamente allo svolgimento del punto precedente si trovi il valore numerico di r (in minuti e decimali) sostituendo i seguenti valori nell'espressione trovata:
 $a = 25$ min, $b = 15$ min e i valori di p_A e p_B ottenuti sapendo che p_B è il doppio di p_A (ossia assumendo che l'addetto B si presenti con probabilità doppia rispetto ad A);
- Si trovi la densità di probabilità $f_R(x)$ della v.a. R . e se ne tracci un grafico accurato di con i dati numerici sopra trovati (si ricavino anche i necessari valori di α e β (vedi figura sopra)).

Quesito A26

22/5/00

Una fabbrica di elettrodomestici monta sui suoi frigoriferi termostati di tipo A o di tipo B indifferentemente.

Un termostato mantiene nel frigorifero una temperatura a regime il cui valore è rappresentato da una variabile casuale uniformemente distribuita fra $(T - \Delta)$ e $(T + \Delta)$, essendo T la temperatura impostata dall'utente.

Nel caso in esame, per i termostati di tipo A si ha $\Delta = 1^\circ\text{C}$ e per i termostati di tipo B si ha $\Delta = 2^\circ\text{C}$.

Si sceglie a caso un frigorifero e si imposta la temperatura $T = 2^\circ\text{C}$.

Si trovi in tal caso la funzione di distribuzione e la densità di probabilità della variabile casuale $X = \text{"temperatura a regime nel frigorifero"}$.

Osservato che in tale frigorifero la temperatura a regime è di $2,5^\circ\text{C}$, si calcoli la probabilità che il termostato sia di tipo A

Quesito A27

15/5/00

Sulle facce di un disco di colore rosso sono impressi i numeri 1 e 3. Sulle facce di un altro disco di colore bianco (ma per il resto identico al primo) sono impressi i numeri 3 e 5. Si sceglie un disco a caso e lo si lancia come una moneta. Sia X la v.a. "numero che si legge sul disco lanciato". Si consideri l'evento $A = \{\text{si è scelto il disco rosso}\}$.

Si trovino la funzione di distribuzione e la densità di probabilità della v.a. X e le stesse condizionate dall'evento A (o dato l'evento A), ossia $F_X(x|A)$ e $f_X(x|A)$.

Quesito A34

16/1/12

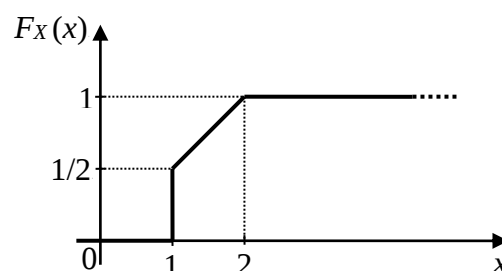
Un satellite artificiale deve svolgere una missione di osservazione della Terra di durata $T = 6$ mesi. Se l'apparecchiatura di osservazione ha una vita rappresentata da una v.a. X con densità di probabilità

$f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x} u(x)$, quale deve essere il valore di λ (espresso con l'appropriata unità di misura) necessario affinché la probabilità che l'apparecchiatura funzioni almeno per tutta la durata della missione sia $P = 0,9$? Qual è il corrispondente valor medio della vita dell'apparecchiatura, $E\{X\}$? La missione viene effettuata con un'apparecchiatura avente proprio il valore di λ trovato sopra, ma purtroppo al termine della missione l'apparecchiatura risulta non funzionante: qual è la probabilità che abbia funzionato per almeno $T_1 = 5$ mesi?

Quesito A46

2/7/12

Si calcoli il valor medio di una v.a. X la cui funzione di distribuzione $F_X(x)$ è illustrata in figura.

**Quesito A63**

13/2/13

a) Sia X una v.a. con funzione di distribuzione $F_X(x)$. Fissato un generico numero reale t si trovi l'espressione analitica della funzione di distribuzione condizionata $F_X(x|X > t)$ esprimendola utilizzando la funzione $F_X(x)$.

b) Successivamente si applichi quanto trovato al caso in cui la v.a. X sia uniformemente distribuita nell'intervallo $0 < x < 4$, e sia: $t = 3$. Si traccino anche i grafici di $F_X(x)$ e di $F_X(x|X > t)$.

Quesito A54 23/11/12

Un certo giorno voi entrate nella vostra banca all'istante t_2 e trovate che allo sportello c'è già un cliente entrato ad un istante incognito $t_1 < t_2$. Sapendo che la v.a. $X = \{\text{Tempo di permanenza allo sportello di un generico cliente}\}$ è di tipo esponenziale negativo con valor medio $\eta_X = 5$ minuti, qual è la probabilità che dobbiate attendere più di 5 minuti prima che sia il vostro turno?
{Si troverà che tale probabilità non dipende dai valori di t_1 e t_2 }.

Quesito A60 13/2/13

I cioccolatini di un certo tipo sono venduti singolarmente ed una frazione p di essi ($0 < p < 1$) contiene un biglietto che dà diritto a sceglierne un altro gratis dello stesso tipo.

- a) Definita la v.a. $N = \{\text{Numero di cioccolatini che si ottengono acquistandone uno}\}$, si trovi la distribuzione di probabilità della variabile N , ossia la probabilità: $p_n = P\{N = n\}$, per ogni n intero positivo. {Facoltativo ma utile: verificare la condizione di normalizzazione}
- b) Si calcoli il valore medio della v.a. N sopra definita, in funzione di p . Si dica poi quanto dovrebbe valere p per avere un valor medio uguale a 2. {Può essere utile ricordare che $n \cdot x^{n-1} = D[x^n]$ }.
- c) Se cinque amici acquistano un cioccolatino ciascuno, si trovi la probabilità P_A che due (soli) di essi ottengano più di un cioccolatino, assumendo $p = 0,2$.

Quesito A77 rid 16/11/13 *uguale a A77 ma senza domanda c)*

Una commissione di n membri è convocata per le ore 10:00.

I partecipanti arrivano indipendentemente con un ritardo che è una v.a. R avente densità $f_R(x)$ uniforme fra i valori $a = -5$ e $b = 15$ minuti, uguale per tutti (Nota: ritardo negativo = anticipo). La riunione ha inizio non appena arriva l'ultimo membro.

- a) Si trovi la funzione di distribuzione $F_X(x)$ e la densità di probabilità $f_X(x)$ della v.a. $X = \{\text{Ritardo di inizio della riunione (rispetto alle ore 10:00)}\}$
- b) Si traccino i grafici di $F_X(x)$ e di $f_X(x)$ nel caso $n = 2$.