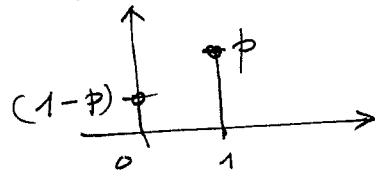


Variabili aleatorie DISCRETE notevoli.
Calcolo del valor medio, varianza e verifica di normalizzazione.

V.A. di Bernoulli di parametro p .

$$p_1 = P\{X=1\} = p$$
$$p_0 = P\{X=0\} = 1-p$$



$$\begin{cases} E\{X\} = p \\ \text{Var}\{X\} = p(1-p) \end{cases}$$

In fatti:

$$E\{X\} = 0 \cdot (1-p) + 1 \cdot p = p \Rightarrow \text{Var}\{X\} = E\{X^2\} - (E\{X\})^2 =$$
$$E\{X^2\} = 0^2 \cdot (1-p) + 1^2 \cdot p = p = p - p^2 = p(1-p)$$

V.A. Binomiale di parametri (n, p) $[Bim(n, p)]$

$$p_i = P\{X=i\} = \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i} \quad i=0, 1, 2, \dots, n$$

$$\begin{cases} E\{X\} = np \\ \text{Var}\{X\} = np(1-p) \end{cases} \leftarrow \begin{matrix} \text{senza dimostrazione} \\ \text{"} \end{matrix}$$

Verifica di normalizzazione:

$$\sum_{i=0}^n p_i = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i} = [p + (1-p)]^n = 1^n = 1$$

dove n è applicata la nota formula:

$$(a+b)^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} a^i b^{n-i} \quad \text{con } a=p \text{ e } b=(1-p)$$

V.A. Geometrica di parametro p [$\text{Geo}(p)$]

$$p_i = P\{X=i\} = p(1-p)^{i-1} \quad i=1, 2, \dots$$

$$E\{X\} = \frac{1}{p} \quad \leftarrow \text{vedi sotto}$$

$$\text{Var}\{X\} = \frac{1-p}{p^2} \quad \leftarrow \text{senza dimostrazione}$$

Valore medio - sia $q = 1-p$

$$E\{X\} = \sum_{i=1}^{+\infty} i \cdot p_i = \sum_{i=1}^{+\infty} i p q^{i-1} = p \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{d}{dq}(q^i) =$$

$$= p \frac{d}{dq} \left(-1 + \sum_{i=0}^{+\infty} q^i \right) = p \frac{d}{dq} \left(\frac{1}{1-q} \right) = \frac{p}{(1-q)^2} = \frac{p}{p^2} = \frac{1}{p}$$

Verifica di normalizzazione

$$\sum_{i=1}^{+\infty} p_i = \sum_{i=1}^{+\infty} p(1-p)^{i-1} = p \cdot \sum_{i=1}^{+\infty} (1-p)^{i-1} = p \cdot \frac{1}{1-(1-p)} = 1$$

V.A. di Poisson di parametro $\lambda > 0$

$$p_i = P\{X=i\} = e^{-\lambda} \frac{\lambda^i}{i!} \quad i=0, 1, 2, \dots$$

$$E\{X\} = \lambda \quad \leftarrow \text{vedi sotto}$$

$$\text{Var}\{X\} = \lambda \quad \leftarrow \text{" "}$$

Valore medio

Si ricordi la seguente: $e^{+\lambda} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^k}{k!}$ (sviluppo in serie di McLaurin di e^λ) -



$$E\{X\} = \sum_{i=0}^{+\infty} i \cdot p_i = \sum_{i=0}^{+\infty} i e^{-\lambda} \frac{\lambda^i}{i!} = \sum_{i=1}^{+\infty} i e^{-\lambda} \frac{\lambda^i}{i!} =$$

$$= e^{-\lambda} \cdot \lambda \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{\lambda^{i-1}}{(i-1)!}$$

dove si è usato: $i \frac{1}{i!} = \frac{1}{(i-1)!}$

Si ponga $k = i-1$:

$$\boxed{E\{X\} = e^{-\lambda} \lambda \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} \cdot \lambda \cdot e^{+\lambda} = \lambda}$$

Valore quadratico medio e varianza

$$E\{X^2\} = \sum_{i=0}^{+\infty} g(x_i) p_i = \sum_{i=0}^{+\infty} i^2 \left(e^{-\lambda} \frac{\lambda^i}{i!} \right) = \sum_{i=1}^{+\infty} i^2 \left(e^{-\lambda} \frac{\lambda^i}{i!} \right) =$$

$\nwarrow g(x) = x^2, x_i = i$
 $\nwarrow$ N.B.

$$= \lambda \cdot \sum_{i=1}^{+\infty} i e^{-\lambda} \frac{\lambda^{i-1}}{(i-1)!} = \lambda \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) \left(e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} \right) =$$

$\nwarrow \nearrow$
 $k = i-1$

$$= \underbrace{\lambda \sum_{k=0}^{+\infty} k p_k}_{E\{X\} = \lambda} + \underbrace{\sum_{k=0}^{+\infty} p_k}_1 = \lambda^2 + \lambda$$

e quindi la varianza:

$$\boxed{\text{Var}\{X\} = E\{X^2\} - (E\{X\})^2 = (\lambda^2 + \lambda) - \lambda^2 = \lambda}$$



Verifica di normalizzazione

$$\left[\sum_{i=0}^{+\infty} p_i = \sum_{i=0}^{+\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^i}{i!} = e^{-\lambda} \underbrace{\sum_{i=0}^{+\infty} \frac{\lambda^i}{i!}}_{e^{\lambda}} = e^{-\lambda} \cdot e^{\lambda} = 1 \right]$$