

Esame di
TEORIA DEI SEGNALE

Quesito A100

Sia X (variabile aleatoria) l'ascissa di un punto scelto a caso nell'intervallo $[0,1]$.

Si calcoli la probabilità (in funzione di a) che entrambe le parti in cui risulta così suddiviso l'intervallo siano di lunghezza minore di a (con $0 < a < 1$).

Si trovi, se esiste, un valore di a per cui gli eventi $E_1 = \{X < a\}$ e $E_2 = \{X > (1-a)\}$ siano indipendenti.

Quesito A100 (Soluzione)

- a) Si chiede di calcolare la probabilità dell'evento congiunto: (vedi fig.1):

$$\{ (X < a) \cap (1-X) \leq a \} =$$

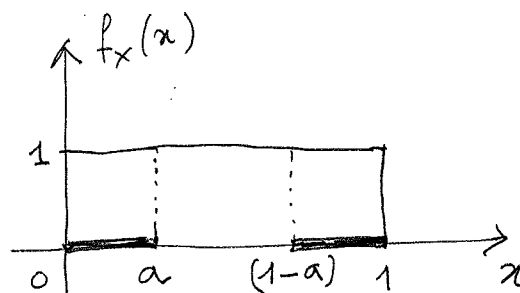


Fig. 1

$$= \{ (X < a) \cap (X > (1-a)) \}$$

I singoli eventi sono rappresentati dai segmenti a tratto spesso in fig. 1 - È evidente che per $0 < a < \frac{1}{2}$ i due eventi sono disgiunti e la probabilità cercata è nulla -

Nel caso $\frac{1}{2} < a < 1$ l'evento intersezione è $\{ (1-a) < X < a \}$

rappresentato dal segmento a tratto

spesso in fig. 2 - In questo caso la probabilità cercata è uguale all'area tratteggiata quindi in definitiva:

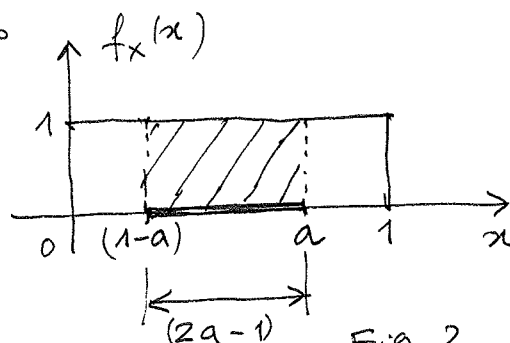
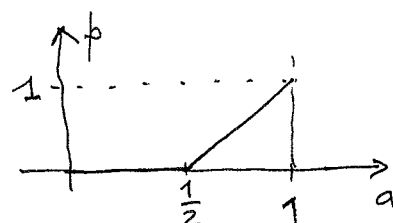


Fig. 2

$$\phi = P\{ (X < a) \cap (X > (1-a)) \} =$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{per } 0 < a < \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} P\{ (1-a) < X < a \} = (2a-1) & \text{per } \frac{1}{2} < a < 1 \end{cases}$$



Tale probabilità è rappresentata in fig. 3 in funzione di a .

b) Gli eventi $\{X < a\}$ e $\{X > 1-a\}$ sono indipendenti se la probabilità della loro intersezione, trovata al punto precedente, risulta uguale al prodotto delle singole probabilità che sono (vedi fig. 1):

$$P\{X < a\} = P\{X > 1-a\} = a.$$

Si chiede quindi se esista un valore di $0 < a < 1$ tale che:

$$a \cdot a = (2a-1) \quad \text{ovvia} \quad a^2 - 2a + 1 = 0$$

$$\text{ovvia ancora } (a-1)^2 = 0.$$

Questa è verificata solo per $a=1$, quindi
non esiste alcun valore di a nell'intervallo $(0,1)$
che renda indipendenti gli eventi indicati.