

Esame di TEORIA DEI SEGNALE

Quesito A101

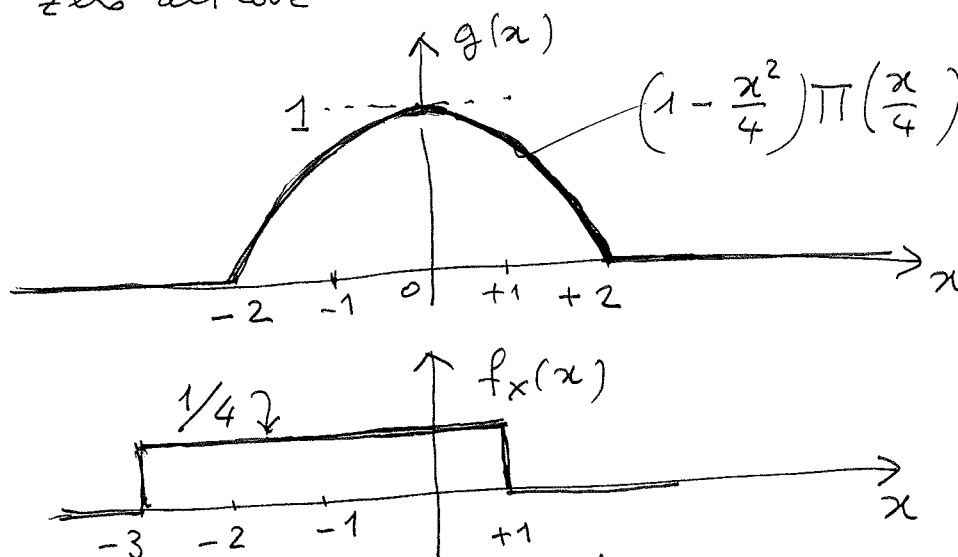
Una variabile aleatoria Y è ottenuta da una variabile aleatoria X mediante la trasformazione $Y = g(X)$. La densità di probabilità $f_X(x)$ sia uniforme fra -3 e $+1$ e la funzione $g(x)$ sia:

$$g(x) = (1 - x^2/4) \cdot \Pi(x/4).$$

- Si traccino i grafici di $g(x)$ e di $f_X(x)$.
- Si trovi l'espressione della densità $f_Y(y)$ e se ne tracci un grafico.

Quesito A101 (Soluzione)

In figura sono riportati i grafici di $y = g(x) = (1 - \frac{x^2}{4}) \Pi(\frac{x}{4})$ e la densità di probabilità $f_X(x)$ di X . Quest'ultima, per la proprietà di normalizzazione, vale $\frac{1}{4}$ nell'intervallo $(-3, 1)$ e zero altrove.



Si può applicare il teorema fondamentale per cui:

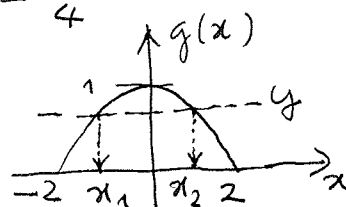
- Fuori del codominio di $g(x)$ si ha $f_Y(y) = 0$: nel corso in esame ciò accade per:

$$y < 0 \text{ e } y > 1.$$

- Zone tratte di $g(x)$: ce n'è una per $y = 0$, quindi in $f_Y(y)$ si avrà una delta in zero di area pari a: $P\{y=0\} = P\{X < -2\} = P\{-3 < X < -2\} = \frac{1}{4}$.

- Per ogni y nell'intervallo $0 < y < 1$ l'equazione $y = g(x)$ ha due soluzioni ricavate così:

$$y = (1 - \frac{x^2}{4}) \rightarrow x^2 = 4(1 - y) \rightarrow x_1 = -2\sqrt{1-y}, \quad x_2 = +2\sqrt{1-y}$$



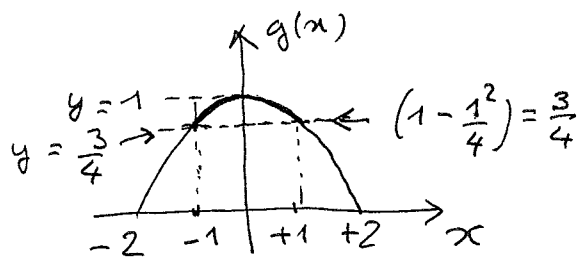
Nell'intervallo $0 < y < 1$, ossia $-2 < x < 2$, la derivata di $g(x)$ è: $g'(x) = \frac{d}{dx} \left(1 - \frac{x^2}{4} \right) = -\frac{x}{2}$ e assume i valori:

$$\begin{cases} g'(x_1) = -\frac{(-2\sqrt{1-y})}{2} = +\sqrt{1-y} \\ g'(x_2) = -\frac{(2\sqrt{1-y})}{2} = -\sqrt{1-y} \end{cases}$$

I valori $f_x(x_1)$ e $f_x(x_2)$ sono diversi da zero entrambi

Solo se x_1 e x_2 cadono nell'intervallo $-1 < x < 1$ e ciò accade quando $\frac{3}{4} < y < 1 \rightarrow$

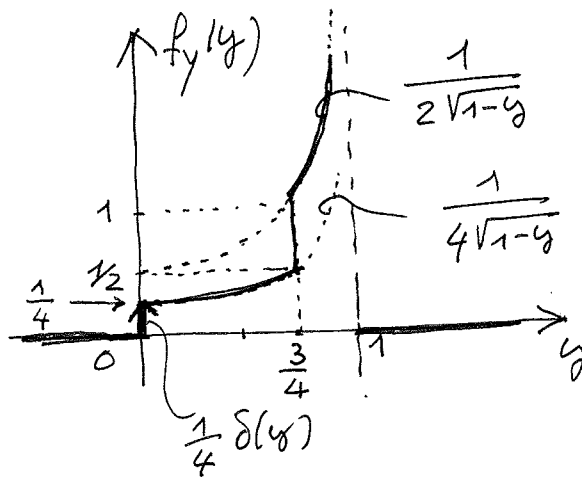
Quindi per ogni $0 < y < 1$ è:



$$f_y(y) = \frac{f_x(x_1)}{|g'(x_1)|} + \frac{f_x(x_2)}{|g'(x_2)|} = \begin{cases} \frac{1/4}{|\sqrt{1-y}|} + \frac{1/4}{|-\sqrt{1-y}|} = \frac{1}{2\sqrt{1-y}} & \text{per } \frac{3}{4} < y < 1 \\ \frac{1/4}{|\sqrt{1-y}|} + \frac{0}{|-\sqrt{1-y}|} = \frac{1}{4\sqrt{1-y}} & \text{per } 0 < y < \frac{3}{4} \end{cases}$$

e quindi:

$$f_y(y) = \begin{cases} \frac{1}{4} \delta(y) & \text{per } y=0 \\ \frac{1}{4\sqrt{1-y}} & \text{per } 0 < y < \frac{3}{4} \\ \frac{1}{2\sqrt{1-y}} & \text{per } \frac{3}{4} < y < 1 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$



Verifica di normalizzazione:

$$\left\{ \begin{aligned} \int_0^{3/4} \frac{1}{4} \frac{1}{\sqrt{1-y}} dy &= -\frac{1}{4} \int_1^{1/4} \frac{1}{\sqrt{\lambda}} d\lambda = \frac{1}{4} [2\sqrt{\lambda}]_{1/4}^1 = \frac{1}{4} \cdot [1 - \frac{1}{2}] = \frac{1}{4}; \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f_y(y) dy = \\ \int_{3/4}^1 \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{1-y}} dy &= \frac{1}{2} [2\sqrt{\lambda}]_{3/4}^1 = \frac{1}{2} \quad \textcircled{B} \\ &= \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = 1 \quad \text{ok.} \end{aligned} \right\}$$

Area delta $\textcircled{A}$ $\textcircled{B}$