

Esame di TEORIA DEI SEGNALE

Quesito A12 13/09/2011

La quantità di denaro che il sig. Rossi ha in tasca quando si ferma a rifornire di benzina la sua auto è una variabile aleatoria X (supposta continua) uniformemente distribuita fra 0 e 200 euro.

Il sig. Rossi ha l'abitudine di comportarsi così:

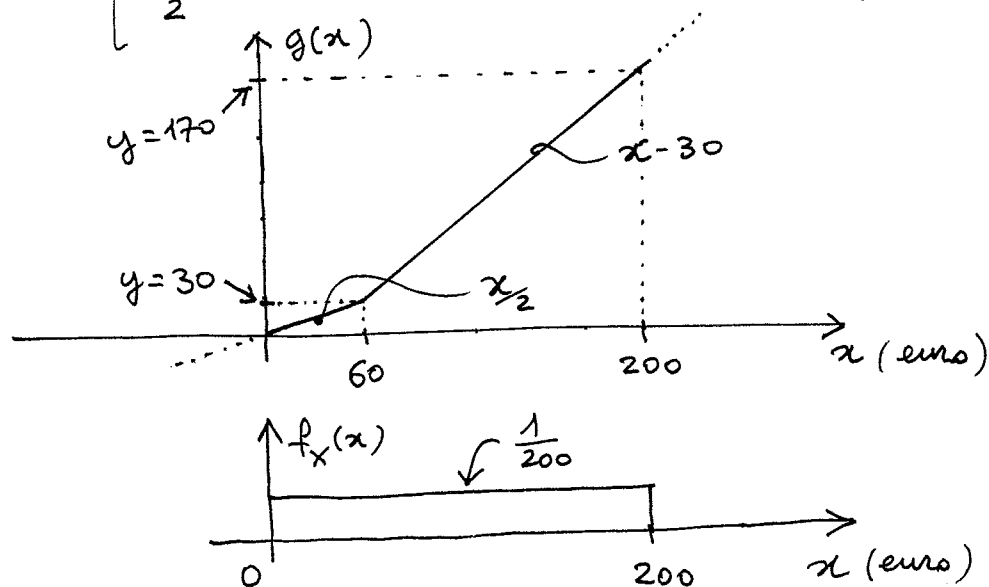
- se in tasca ha più di 60 euro mette 30 euro di benzina;
- se ha meno di 60 euro (o 60 euro) mette una quantità di benzina corrispondente alla metà dei soldi che ha in tasca.

Si trovi la densità di probabilità della v.a. $Y = \{\text{Quantità di denaro che il sig. Rossi ha in tasca dopo un generico rifornimento}\}$. (N.B. - Si ipotizza che occorran sempre più di 30 euro per raggiungere il pieno).

Quesito A12 - (Soluzione)

La v.a. Y non può essere ottenuta dalla X con la trasformazione seguente:

$$y = g(x) = \begin{cases} x - 30 & \text{per } x > 60 \\ \frac{x}{2} & \text{per } x \leq 60 \end{cases} \Rightarrow g'(x) = \begin{cases} 1 & \text{per } x > 60 \\ \frac{1}{2} & \text{per } x \leq 60 \end{cases}$$



Per ogni valore di y esiste una sola soluzione di $y = g(x)$ che nei vari tratti vale (si veda il grafico):

$$\text{per } y > 30 \rightarrow y = x - 30 \rightarrow x_1 = y + 30, \quad g'(x_1) = 1$$

$$\text{per } y < 30 \rightarrow y = \frac{x}{2} \rightarrow x_1 = 2y, \quad g'(x_1) = \frac{1}{2}$$

Si può applicare il teorema fondamentale ottenendosi:

$$f_Y(y) = \frac{f_X(x_1)}{|g'(x_1)|} = \begin{cases} \frac{\frac{1}{200}}{1} = \frac{1}{200} & \text{per } 30 < y < 170 \quad (60 < x_1 < 200) \\ \frac{\frac{1}{200}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{100} & \text{per } 0 < y < 30 \quad (0 < x_1 < 60) \\ 0 & \text{per } y < 0, y > 170 \quad (x_1 < 0, x_1 > 200) \end{cases}$$

Da cui il grafico:

