

Esame di

TEORIA DEI SEGNALE

Quesito A15 2/12/1010

In un certo lotto di personal computer (PC) l'1% è difettoso. I PC vengono sottoposti ad un test che rivela i difetti nel 98% dei casi in cui difetti sono presenti e indica presenza di difetti nel 3% dei casi in cui il PC non è difettoso. Quanto vale la probabilità che un PC sia: a) difettoso se non passa il test (ossia se il test rivela difetti); b) non difettoso se passa il test (ossia se il test non rivela difetti)?

Quesito A15 - (Soluzione)

Si definiscano i seguenti eventi:

$D = \{ \text{Il PC sottoposto al test è difettoso} \}$

$R = \{ \text{Il test rivela presenza di difetti} \}. (*)$

Dal testo si ricavano le seguenti probabilità:

$P(D) = 0,01$ e quindi la complementare $P(\bar{D}) = 0,99$

$P(R|D) = 0,98$ " " " " $P(\bar{R}|D) = 0,02 (**)$

$(***) P(R|\bar{D}) = 0,03$ " " " " $P(\bar{R}|\bar{D}) = 0,97.$

Il quesito a) richiede di calcolare la probabilità $P(D|R)$ che si può trovare per mezzo delle probabilità date, usando la formula di Bayes:

$$P(D|R) = \frac{P(R|D) \cdot P(D)}{P(R)} = \frac{0,98 \cdot 0,01}{0,0395} \approx 0,25 = 25\%$$

dove si è fatto uso della seguente (teorema delle probabilità totali):

$$P(R) = P(R|D) \cdot P(D) + P(R|\bar{D}) \cdot P(\bar{D}) = 0,98 \cdot 0,01 + 0,03 \cdot 0,99 = 0,0395$$

Per il quesito b) il calcolo, analogo al precedente, è il seguente:

$$P(\bar{D}|\bar{R}) = \frac{P(\bar{R}|\bar{D}) \cdot P(\bar{D})}{P(\bar{R})} = \frac{0,97 \cdot 0,99}{0,9605} \approx 0,995 = 99,5\%$$

dove:

$$P(\bar{R}) = 1 - P(R) = 1 - 0,0395 = 0,9605$$

(segue)

$\left\{ \begin{array}{l} \text{Si osserva che il test è molto affidabile quando} \\ \text{non rivela difetti } (P(\bar{D}|\bar{R})=99,5\%) \text{ ma non lo è} \\ \text{affatto quando li rivela, infatti se il test rivela difetti} \\ \text{è molto più probabile che il PC sia non difettoso} \\ (P(\bar{D}|R)=75\%) \text{ piuttosto che sia effettivamente} \\ \text{difettoso } (P(D|R)=25\%) \end{array} \right\} \text{ (****)}$

NOTE

(*) Quando un test diagnostico rivela difetti si dice che "il test è risultato positivo". Quindi $P(R)$ è la probabilità che il test risulti positivo quando eseguito su un oggetto scelto a caso (in questo caso un PC). Tale probabilità dipende sia dalla frequenza di difetti negli oggetti considerati, sia dall'affidabilità del test.

(**) Questa probabilità è detta anche "probabilità di falso negativo", ossia è la probabilità che il test risulti negativo (non riveli difetti) quando eseguito su un oggetto in realtà difettoso. E' grave soprattutto in caso di test sanitari (perché non viene rivelata una malattia presente).

(***) Questa probabilità è detta anche "probabilità di falso positivo", ossia è la probabilità che il test risulti positivo (riveli difetti) quando in realtà l'oggetto non è difettoso. E' meno grave del caso precedente. Si può migliorare ripetendo il test sullo stesso soggetto : ciò equivale ad eseguire un diverso test con probabilità di falso positivo più bassa (si veda anche il Quesito A53).

(****) Un test affidabile dovrebbe avere basse probabilità sia di falso negativo sia di falso positivo, ma "quanto basse" dipende dalla situazione. Per esempio, il test in esame ha una probabilità di falso positivo che, per quanto possa sembrare bassa (3%), è troppo elevata per la situazione in cui è applicato. Infatti essendo difettoso solo 1% degli oggetti, quando il test risulta positivo (ossia nel condizionamento a R) è molto più probabile che abbia fallito il test (75%) piuttosto che l'oggetto sia effettivamente difettoso (25%). Al limite, in una situazione in cui nessun oggetto fosse difettoso, nessuna probabilità di falso positivo, comunque bassa (ma non nulla) renderebbe il test affidabile, infatti in tal caso TUTTI i difetti rivelati sarebbero sempre falsi (falsi positivi).