

# Esame di TEORIA DEI SEGNALE

## **Quesito A16** 2/12/1010

Una variabile aleatoria  $X$  ha densità di probabilità uniforme con valor medio  $\eta_X$  e varianza  $\sigma_X^2$ .

Si individuino gli estremi  $a$  e  $b$  dell'intervallo di valori che la variabile può assumere.

Si calcoli la probabilità  $P\{\eta_X - \sigma_X < X < \eta_X + \sigma_X\}$  ossia la probabilità che la v.a. assuma valori che si discostano dal valor medio meno di una deviazione standard.

{A scanso di equivoci: la disuguaglianza di Chebychev non c'entra}.

## Quesito A16 - (soluzione)

E' noto che per una v.a.  $X$  con densità di probabilità uniforme fra i valori  $a$  e  $b$  (con  $a < b$ ) valgono le seguenti:

$$\eta_X = \frac{a+b}{2} \quad ; \quad \sigma_X^2 = \frac{(b-a)^2}{12} \quad \text{da cui:} \quad \sigma_X = \frac{(b-a)}{2\sqrt{3}}$$

Quindi dal sistema:

$$\begin{cases} a+b = 2\eta_X \\ -a+b = 2\sqrt{3} \cdot \sigma_X \end{cases} \quad \text{si ricava:} \quad \begin{cases} a = \eta_X - \sqrt{3} \cdot \sigma_X \\ b = \eta_X + \sqrt{3} \cdot \sigma_X \end{cases}$$

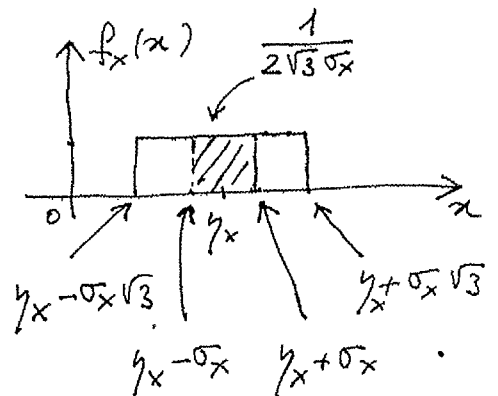
E il valore (costante) della densità fra  $a$  e  $b$  vale (per la normalizzazione):

$$f_X(x) = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{3} \cdot \sigma_X} \quad \text{per } \eta_X - \sqrt{3} \sigma_X < x < \eta_X + \sqrt{3} \sigma_X$$

Quindi la probabilità cercata vale:

$$P\{\eta_X - \sigma_X < X < \eta_X + \sigma_X\} = \frac{1}{\sqrt{3}} \approx 0,58$$

essendo uguale all'area tratteggiata in figura -



(segue)

{ Non ricorrendo al legame fra  $\mu_x, \sigma_x^2$  e  $a, b$  si poteva applicare la definizione di valore medio, e le proprietà della varianza:

$$\mu_x = E\{x\} = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f_x(x) dx = \int_a^b x \cdot \frac{1}{b-a} dx = \frac{1}{b-a} \left[ \frac{1}{2} x^2 \right]_a^b = \frac{b+a}{2}$$

$$\sigma_x^2 = E\{x^2\} - \mu_x^2 = \frac{1}{3} (b^2 + ab + a^2) - \left( \frac{b+a}{2} \right)^2 = \frac{(b-a)^2}{12}$$

ovvero:

$$E\{x^2\} = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \cdot f_x(x) dx = \int_a^b x^2 \cdot \frac{1}{b-a} dx = \frac{1}{b-a} \left[ \frac{1}{3} x^3 \right]_a^b = \frac{1}{3} (b^2 + ab + a^2) \}$$