

Esame di
TEORIA DEI SEGNALE

Quesito A17 2/12/1010

Su un segmento lungo 10 cm si sceglie un punto a caso. Si trovi la densità di probabilità della v.a. $Y = \{\text{area del rettangolo avente per lati le due parti del segmento}\}$.

Quesito A17 - (Soluzione)

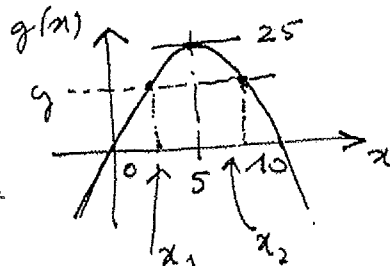
Detta X la v.a. $X = \{\text{lunghezza di una delle due parti del segmento}\}$ si può assumere che essa abbia densità di probabilità uniforme fra 0 e 10 cm, ossia:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{10} & 0 \leq x \leq 10 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

Cio' che si richiede è quindi la densità di probabilità della v.a. $Y = X \cdot (10 - X)$ che è funzione della X secondo la seguente: $g(x) = x \cdot (10 - x) = 10x - x^2$

il cui grafico è come in figura.

Si può applicare il teorema fondamentale che richiede la soluzione dell'equazione $y = x(10 - x)$ ossia:



$x^2 - 10x + y = 0$ che non ha soluzioni per $y > 25$ (vedi figura) e che ha le due soluzioni seguenti per $y \leq 25$:

$$x_{1,2} = \frac{10 \pm \sqrt{100 - 4y}}{2} = 5 \pm \sqrt{25 - y}$$

Serve anche la derivata di $g(x)$ che vale: $g'(x) = 10 - 2x$.
Quindi:

(segue)

Quindi:

$$f_y(y) = \begin{cases} 0 & \text{per } y > 25 \\ \frac{f_x(x_1)}{|g'(x_1)|} + \frac{f_x(x_2)}{|g'(x_2)|} = \frac{\frac{1}{10}}{|10 - 2(5 - \sqrt{25-y})|} + \frac{\frac{1}{10}}{|10 - 2(5 + \sqrt{25-y})|} & \text{per } 0 < y < 25 \\ 0 & \text{per } y < 0 \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{per } y > 25 \\ \frac{1}{10\sqrt{25-y}} & \text{per } 0 < y < 25 \\ 0 & \text{per } y < 0 \end{cases}$$

