

Esame di
TEORIA DEI SEGNALE

Quesito A18 2/12/1010

La durata di una conversazione telefonica è una v.a. con funzione di distribuzione

$F_X(x) = (1 - e^{-\lambda x}) u(x)$. Quanto vale la probabilità che una telefonata in atto all'istante t_0 termini entro i successivi t secondi?

Quesito A18 - Soluzione

Detta X la v.a. $X = \{\text{durata della conversazione}\}$ si cerca la probabilità dell'evento: $\{ \text{la conversazione termina entro l'istante } t_0 + t \}$ ovvero: $\{ \text{la durata è minore di (o uguale a) } t_0 + t \}$ ovvero: $\{ X \leq t_0 + t \}$, condizionata dall'evento:

$\{ \text{la conversazione è ancora in atto a } t_0 \}$ ovvero: $\{ \text{la durata è maggiore di } t_0 \}$ ovvero: $\{ X > t_0 \}$ -

Quindi cerchiamo:

$$\begin{aligned} P\{X \leq t_0 + t | X > t_0\} &= \frac{P\{X \leq t_0 + t, X > t_0\}}{P\{X > t_0\}} = \frac{P\{t_0 < X \leq t_0 + t\}}{1 - P\{X \leq t_0\}} = \\ &= \frac{F_X(t_0 + t) - F_X(t_0)}{1 - F_X(t_0)} = \frac{(1 - e^{-\lambda(t_0 + t)}) - (1 - e^{-\lambda t_0})}{1 - (1 - e^{-\lambda t_0})} = \\ &= \frac{\cancel{1} - e^{-\lambda t_0} - \cancel{1} + e^{-\lambda t_0} - \cancel{1} + e^{-\lambda t_0}}{\cancel{1} - \cancel{1} + e^{-\lambda t_0}} = \frac{e^{-\lambda t_0}(1 - e^{-\lambda t})}{e^{-\lambda t_0}} = 1 - e^{-\lambda t} \end{aligned}$$

che è la probabilità cercata -

$\{ \text{Si noti che tale probabilità non dipende da } t_0 \text{ ossia: la prob. che la telefonata termini entro i successivi 30 secondi è la stessa sia che sia durata un minuto sia che sia durata 100 minuti - È una caratteristica della densità esponenziale negativa (che ha per funz. di distrib. la } F_X(x) \text{ data)} \}$.