

Esame di TEORIA DEI SEGNALE

Quesito A20 N

La vita di un certo tipo di lampade è rappresentata da una v.a. X con densità di probabilità $f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x} u(x)$. Due di tali lampade vengono accese contemporaneamente in una stanza. Si calcoli la probabilità che: a) all'istante generico t_0 le lampade siano entrambe accese; b) all'istante t_0 siano entrambe spente; c) le lampade siano entrambe accese osservando che all'istante t_0 nella stanza c'è luce.

Quesito A20 - (Soluzione)

Detto L_X e L_Y le due lampade, siano X e Y le v.a. rappresentative delle rispettive vite -

Si definiscano gli eventi:

$$A \triangleq \{L_X \text{ è accesa a } t_0\} = \{X > t_0\}$$

$$B \triangleq \{L_Y \text{ è accesa a } t_0\} = \{Y > t_0\}$$

I due eventi si possono assumere indipendenti essendo relativi a sistemi finiti distinti - Essendo inoltre le lampade dello stesso tipo si ha $f_X(x) = f_Y(x)$.

a) Si cerca:

$$P\{\text{entrambe accese a } t_0\} = P(AB) = \overset{\text{indipendenza}}{P(A) \cdot P(B)}$$

dove:

$$P(A) = P(B) = P(X > t_0) = P(Y > t_0) = \int_{t_0}^{+\infty} f_X(x) dx = 1 - \int_0^{t_0} \lambda e^{-\lambda x} dx =$$
$$= 1 - \lambda \left[\frac{e^{-\lambda x}}{-\lambda} \right]_0^{t_0} = 1 + (e^{-\lambda t_0} - 1) = e^{-\lambda t_0}$$

Quindi:

$$\boxed{P(AB) = P(A) \cdot P(B) = e^{-2\lambda t_0}}$$

b) L'indipendenza di A e B implica quella di $\bar{A}$ e $\bar{B}$ quindi la prob. che a t_0 le lampade siano entrambe spente è:

$$\boxed{P(\bar{A}\bar{B}) = P(\bar{A}) \cdot P(\bar{B}) = (1 - e^{-\lambda t_0})^2 = 1 - 2e^{-\lambda t_0} + e^{-2\lambda t_0}}$$

-c) L'evento "nella stanza c'è luce" è espresso dall'evento: $A \cup B$. La probabilità cercata è quindi:

$$P\{\text{entrambe accese} \mid \text{nella stanza c'è luce}\} = P(AB \mid A \cup B) = \frac{P(AB(A \cup B))}{P(A \cup B)} = \frac{P(ABA \cup ABB)}{P(A \cup B)} = \frac{P(AB)}{P(A \cup B)}$$

Ricordando che:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB) = e^{-\lambda t_0} + e^{-\lambda t_0} - e^{-2\lambda t_0} = 2e^{-\lambda t_0} - e^{-2\lambda t_0}$$

e che (vedi punto a): $P(AB) = e^{-2\lambda t_0}$

si ha:

$$P(AB \mid A \cup B) = \frac{P(AB)}{P(A \cup B)} = \frac{e^{-2\lambda t_0}}{2e^{-\lambda t_0} - e^{-2\lambda t_0}} = \frac{e^{-\lambda t_0}}{2 - e^{-\lambda t_0}}$$