

Esame di
TEORIA DEI SEGNALE

Quesito A22 - (Soluzione)

Conviene cambiare fucile se, dato il risultato dei 10 tiri, è più probabile che il fucile usato sia il B (peggiore) piuttosto che l'A (migliore).

Quindi, definiti gli eventi:

$A = \{ \text{Il fucile scelto è A} \}$

$B = \{ \text{" " " " B} \}$

$C = \{ 7 \text{ centri su 10 colpi} \}$

Conviene cambiare fucile se:

$$P(A|C) < P(B|C) \text{ ovvero se } \frac{P(A|C)}{P(B|C)} < 1$$

Perché è:

$$P(A|C) = \frac{P(C|A)P(A)}{P(C)} = \binom{10}{7} P_A^7 (1-P_A)^3 \cdot \frac{P(A)}{P(C)}$$

$$P(B|C) = \frac{P(C|B)P(B)}{P(C)} = \binom{10}{7} P_B^7 (1-P_B)^3 \cdot \frac{P(B)}{P(C)}$$

Assunto $P(A) = P(B) = \frac{1}{2}$ (scelta a caso), si ha:

$$\frac{P(A|C)}{P(B|C)} = \left(\frac{P_A}{P_B} \right)^7 \left(\frac{1-P_A}{1-P_B} \right)^3 = \left(\frac{0,8}{0,6} \right)^7 \left(\frac{0,2}{0,4} \right)^3 \approx 0,94 < 1$$

Quindi nel caso proposto conviene cambiare fucile.

Volendo calcolare le due probabilità da confrontare

si ha:



Dalle seguenti:

$$P(C|A) = \binom{10}{7} P_A^7 (1-P_A)^3 = 120 \cdot 0,8^7 \cdot 0,2^3 = 0,2013$$

$$P(C|B) = \binom{10}{7} P_B^7 (1-P_B)^3 = 120 \cdot 0,6^7 \cdot 0,4^3 = 0,1075$$

$$P(C) = P(C|A)P(A) + P(C|B)P(B) = 0,2013 \cdot 0,5 + 0,1075 \cdot 0,5 = 0,2081$$

Si ricava:

$$\boxed{P(A|C)} = \frac{P(C|A) \cdot P(A)}{P(C)} = \frac{0,2013 \cdot 0,5}{0,2081} \approx \boxed{0,48}$$

$$\boxed{P(B|C)} = \frac{P(C|B) P(B)}{P(C)} = \frac{0,1075 \cdot 0,5}{0,2081} \approx \boxed{0,52}$$