

Esame di
TEORIA DEI SEGNALE

Quanto A23 - (soluzione)

1) È noto che la densità di probabilità di una v.a. gaussiana $\mathcal{N}(\mu_x, \sigma_x^2)$ è:

$$f_x(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x} e^{-\frac{(x-\mu_x)^2}{2\sigma_x^2}}$$

La densità di probabilità della v.a. Y , funzione della X secondo la seguente: $y = g(x) = -c(x+d)$ si ottiene applicando il teorema fondamentale a detta trasformazione -
Risolvendo la seguente: $y = -c(x+d)$ rispetto a x si ha l'unica soluzione:

$$x_1 = \frac{y - cd}{-c} = \frac{y}{-c} - d, \text{ si ha inoltre: } g'(x) = -c$$

Quindi risulta:

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= \frac{f_X(x_1)}{|g'(x_1)|} = \frac{f_X\left(\frac{y-cd}{-c}\right)}{|-c|} = \frac{1}{|c|} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x} e^{-\frac{\left[\frac{y-cd}{-c} - \mu_x\right]^2}{2\sigma_x^2}} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi} c^2 \sigma_x^2} e^{-\frac{[y - (cd + c\mu_x)]^2}{2 \cdot (c^2 \sigma_x^2)}} \end{aligned}$$

In cui si riconosce una gaussiana con parametri:

$$\begin{cases} \sigma_Y^2 = c^2 \sigma_x^2 \\ \mu_Y = -c\mu_x + cd \end{cases}$$

2) Per ottenere una v.a. $\mathcal{N}(0,1)$ occorre imporre $\mu_Y = 0$ e $\sigma_Y^2 = 1$

$$\text{ovvero: } \begin{cases} \sigma_Y^2 = c^2 \sigma_x^2 = 1 \\ \mu_Y = -c\mu_x + cd = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = \frac{1}{\sigma_x} \\ -d = -\mu_x \end{cases}$$