

Esame di TEORIA DEI SEGNALE

Quesito A26 22/5/2000

Una fabbrica di elettrodomestici monta sui suoi frigoriferi termostati di tipo A o di tipo B indifferentemente.

Un termostato mantiene nel frigorifero una temperatura a regime il cui valore è rappresentato da una variabile casuale uniformemente distribuita fra $(T - \Delta)$ e $(T + \Delta)$, essendo T la temperatura impostata dall'utente.

Nel caso in esame, per i termostati di tipo A si ha $\Delta = 1^\circ\text{C}$ e per i termostati di tipo B si ha $\Delta = 2^\circ\text{C}$.

Si sceglie a caso un frigorifero e si imposta la temperatura $T = 2^\circ\text{C}$.

Si trovi in tal caso la funzione di distribuzione e la densità di probabilità della variabile casuale $X = \text{"temperatura a regime nel frigorifero"}$.

Osservato che in tale frigorifero la temperatura a regime è di $2,5^\circ\text{C}$, si calcoli la probabilità che il termostato sia di tipo A.

Quesito A26 - (soluzione)

La densità di probabilità della v.a. $X = \text{"temperatura [che si ottiene] a regime nel frigorifero [scelto a caso]}"$ si può scrivere ricorrendo al teorema delle probabilità totali:

$$f_X(x) = f_X(x|A) \cdot P(A) + f_X(x|B) \cdot P(B) \quad (1)$$

essendo A l'evento: {il frigorifero scelto monta un termostato di tipo A} e B l'evento simmetrico -

Scelto a caso un frigorifero e impostata la temperatura $T = 2^\circ\text{C}$ le densità condizionate che compaiono in (1) si

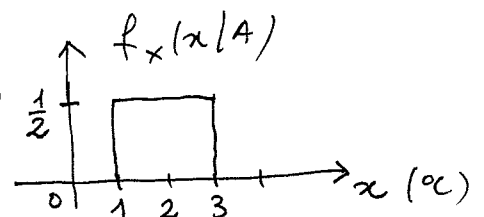
possono scrivere entrambe nel modo seguente:

$$f_X(x | \text{Tipo del termostato}) = \frac{1}{2\Delta} \text{rect}\left(\frac{x-T}{2\Delta}\right)$$

che nei due casi assume la forma:

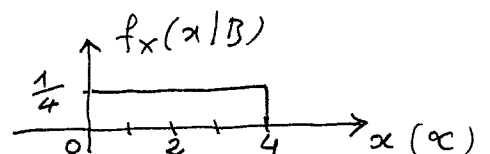
Tipo A : $\Delta = 1^\circ\text{C}$, $T = 2^\circ\text{C}$

$$f_X(x|A) = \frac{1}{2} \text{rect}\left(\frac{x-2}{2}\right)$$



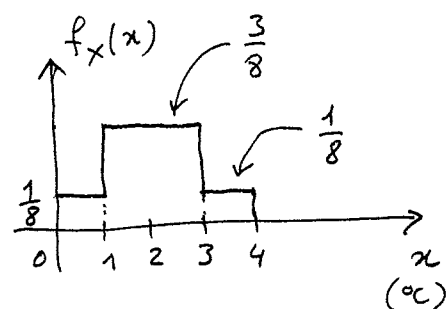
Tipo B : $\Delta = 2^\circ\text{C}$, $T = 2^\circ\text{C}$

$$f_X(x|B) = \frac{1}{4} \text{rect}\left(\frac{x-2}{4}\right)$$



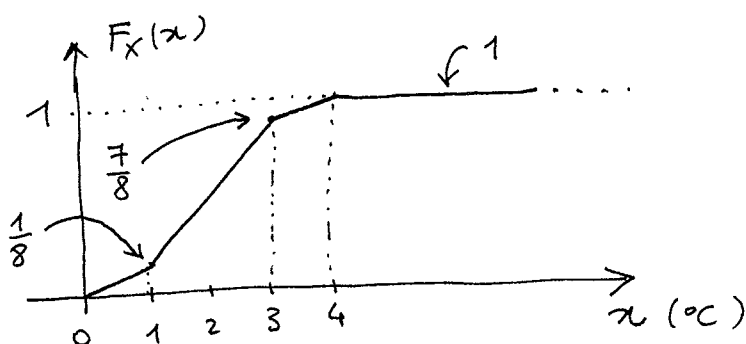
Si può senz'altro assumere $P(A) = P(B) = \frac{1}{2}$, quindi la densità cercata è:

$$f_X(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \text{rect}\left(\frac{x-2}{2}\right) + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \text{rect}\left(\frac{x-2}{4}\right)$$



La funzione di distribuzione si può ottenere integrando la $f_X(x)$, anche con l'aiuto del grafico e si ha:

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(u) du = \begin{cases} 0 & \text{per } x < 0 \\ \frac{1}{8}x & \text{per } 0 \leq x < 1 \\ \frac{3}{8}(x-1) + \frac{1}{8} & \text{per } 1 \leq x < 3 \\ \frac{1}{8}(x-3) + \frac{7}{8} & \text{per } 3 \leq x < 4 \\ 1 & \text{per } x \geq 4 \end{cases}$$



Detta t la temperatura osservata a regime, la probabilità che il termostato montato sia di tipo A si può scrivere nel modo seguente ricordando la formula di Bayes in forma mista:

$$P(A|X=t) = \frac{f_X(t|A) \cdot P(A)}{f_X(t)}$$

che nel caso in esame ($t=2,5$; $T=2^\circ\text{C}$; densità trovate sopra) dà:

$$P(A|X=2,5) = \frac{f_X(2,5|A) \cdot P(A)}{f_X(2,5)} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}}{\frac{3}{8}} = \frac{2}{3}$$