

Frase di TEORIA DEI SEGNALE

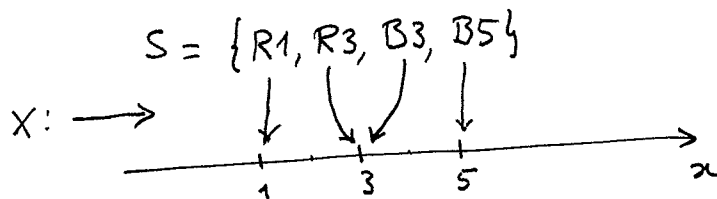
Quesito A27 15/5/2000

Sulle facce di un disco di colore rosso sono impressi i numeri 1 e 3. Sulle facce di un altro disco di colore bianco (ma per il resto identico al primo) sono impressi i numeri 3 e 5. Si sceglie un disco a caso e lo si lancia come una moneta. Sia X la v.a. "numero che si legge sul disco lanciato". Si consideri l'evento $A = \{\text{si è scelto il disco rosso}\}$.

Si trovino la funzione di distribuzione e la densità di probabilità della v.a. X e le stesse condizionate dall'evento A (o dato l'evento A), ossia $F_X(x|A)$ e $f_X(x|A)$.

Quesito A27 - (Soluzione)

Con evidente significato dei simboli lo spazio campionario S (che si può assumere uniforme) e la v.a. X definita sull'esperimento si possono così rappresentare:

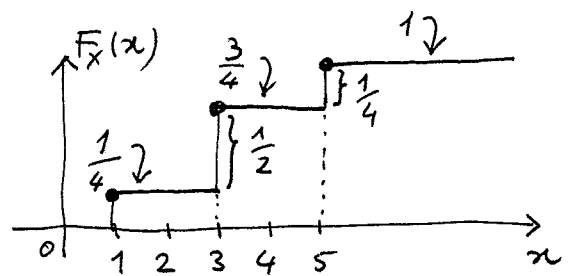
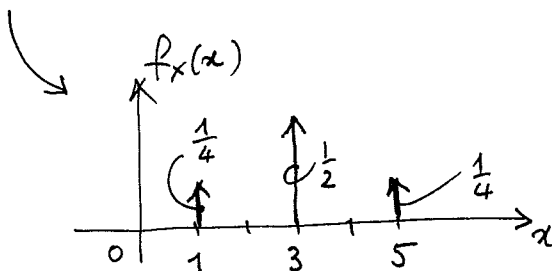


La funzione di distribuzione $F_X(x)$ si può quindi scrivere:

$$F_X(x) = P\{X \leq x\} = \begin{cases} P\{S\} = 1 & \text{per } x \geq 5 \\ P\{R1, R3, B3\} = \frac{3}{4} & \text{per } 3 \leq x < 5 \\ P\{R1\} = \frac{1}{4} & \text{per } 1 \leq x < 3 \\ 0 & \text{per } x < 1 \end{cases}$$

e la corrispondente densità:

$$f_X(x) = \frac{1}{4} \delta(x-1) + \frac{1}{2} \delta(x-3) + \frac{1}{4} \delta(x-5)$$



Ricaviamo le grandezze condizionate ricorrendo alla definizione -

Si osservi che : $A = \{\text{si è scelto il disco rosso}\} = \{R1, R3\}$,

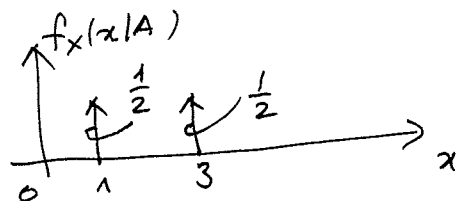
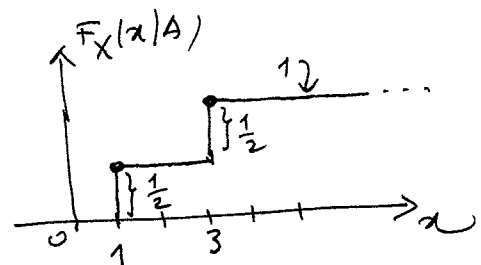
da cui : $P(A) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$.

Quindi:

$$F_X(x|A) = \frac{P(\{X \leq x\} \cap A)}{P(A)} = \begin{cases} \frac{P(A)}{P(A)} = 1 & \text{per } x \geq 5 \\ \frac{P(\{R1, R3, R3\} \cap \{R1, R3\})}{P(A)} = \frac{P(A)}{P(A)} = 1 & \text{" } 3 \leq x < 5 \\ \frac{P(\{R1\} \cap \{R1, R3\})}{P(A)} = \frac{P(\{R1\})}{P(A)} = \frac{1/4}{1/2} = \frac{1}{2} & \text{" } 1 \leq x < 3 \\ \frac{P(\emptyset)}{P(A)} = 0 & \text{" } x < 1 \end{cases}$$

e la densità:

$$f_X(x|A) = \frac{1}{2} \delta(x-1) + \frac{1}{2} \delta(x-3)$$



Naturalmente si poteva raggiungere lo stesso risultato più semplicemente osservando che le grandezze condizionate all'evento A coincidono con quelle non condizionate relative al solo disco rosso -