

Esame di TEORIA DEI SEGNALE

Quesito A2

18/2/2011

Un componente in garanzia viene sostituito gratuitamente se si guasta entro un anno dall'acquisto. Se il tempo di guasto del componente è una variabile aleatoria esponenziale negativa con valore medio 5 anni, quant'è la probabilità che su un lotto di 20 componenti ne debbano essere sostituiti in un anno 2 o più?

Quesito A2 - (soluzione)

Detta X la v.a. {vita del componente (in anni)}, la densità di probabilità di X è:

$$f_X(x) = \frac{1}{5} e^{-\frac{x}{5}} u(x) .$$

Detta p la probabilità che un generico componente si guasti entro un anno (e quindi debba essere sostituito in garanzia) è:

$$p = \int_0^1 \frac{1}{5} e^{-\frac{x}{5}} dx = \frac{1}{5} \left[\frac{e^{-\frac{x}{5}}}{-\frac{1}{5}} \right]_0^1 = \frac{e^{-\frac{1}{5}} - 1}{-1} = 1 - e^{-\frac{1}{5}} \approx 0,181$$

Si deve calcolare la seguente probabilità:

$$P_G \triangleq P\{2 \text{ o più componenti guasti in un anno su } 20 \text{ componenti}\} -$$

A nostra l'indipendenza dei guasti su componenti distinti, il problema è di prove ripetute e si ha:

$$P_G = \sum_{k=2}^{20} \binom{20}{k} p^k (1-p)^{20-k}$$

che si calcola più facilmente passando dalla probabilità Q_G dell'evento complementare $Q_G = P\{(\text{zero guasti}) \cup (\text{1 guasto})\} =$

$= P\{\text{zero guasti}\} + P\{\text{1 guasto}\}$ essendo gli eventi mutuamente esclusivi — quindi:

$$\begin{aligned} P_G &= 1 - Q_G = 1 - P\{\text{zero guasti}\} - P\{\text{1 guasto}\} = \\ &= 1 - \binom{20}{0} p^0 (1-p)^{20} - \binom{20}{1} p \cdot (1-p)^{19} = 1 - (1-p)^{20} - 20p(1-p)^{19} = \\ &= 1 - 0,819^{20} - 20 \cdot 0,181 \cdot 0,819^{19} = 1 - 0,0184 - 0,0815 \approx \boxed{0,90} \end{aligned}$$