

Esame di TEORIA DEI SEGNALE

Quesito A30

Un certo tipo di sfere ha diametro che è una variabile aleatoria D uniforme fra 1 e 4 cm.

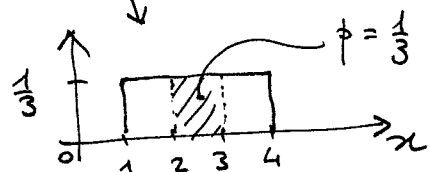
Avete bisogno di tre sfere di diametro compreso fra 2 e 3 cm.

- Qual è la probabilità che dobbiate misurare almeno 10 sfere per trovare le tre desiderate?
- Definita la v.a. $N = \{\text{numero di sfere da misurare per ottenere le tre desiderate}\}$, si trovi la distribuzione di probabilità della variabile N , ossia la probabilità $P\{N=n\}$ per ogni n , e se ne tracci un grafico accurato per $n \leq 5$. (Alternativamente si tracci un grafico della funzione di distribuzione (CDF) o della densità di probabilità (PDF) della variabile N vista come continua).

Quesito A30 - (soluzione)

Si tratta di un esperimento di prove ripetute in cui il "successo" è l'evento $\{2 < D < 3\}$ la cui probabilità è $p \triangleq P\{2 < D < 3\} = \frac{1}{3}$ come si ricava facilmente data l'uniformità della densità di probabilità: $f_D(x) = \frac{1}{3} \mathbb{I}\left(\frac{x-2,5}{3}\right)$.

- La probabilità di dover misurare almeno 10 sfere è uguale alla probabilità di ottenere un numero di successi minore di 3 nelle prime 9 prove (ovvero 0, 1, 2 successi), che si può scrivere:



$$P = \sum_{i=0}^2 \binom{9}{i} p^i (1-p)^{9-i} = \binom{9}{0} \left(\frac{1}{3}\right)^0 \left(\frac{2}{3}\right)^9 + \binom{9}{1} \cdot \frac{1}{3} \left(\frac{2}{3}\right)^8 + \binom{9}{2} \left(\frac{1}{3}\right)^2 \left(\frac{2}{3}\right)^7 \approx 0,377$$

[Vedi anche il testo Bonomi, Fenari, Prob. 3.19, n. 4]

- La probabilità che il numero di misure da eseguire per ottenere le 3 desiderate sia n è uguale alla probabilità che la terza sfera si presenti proprio all' n -esima misura: è quindi uguale alla prob. di avere 2 successi in $(n-1)$ prove e un successo nell'ultima, ossia (data l'indipendenza delle prove):

$$P\{N=n\} = \left[\binom{n-1}{2} p^2 (1-p)^{n-1-2} \right] \cdot p = \binom{n-1}{2} \left(\frac{1}{3}\right)^3 (1-p)^{n-1} = \frac{(n-1)(n-2)}{2} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3 \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} = \frac{1}{16} (n-1)(n-2) \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

[Vedi anche BF, prob 3.19, n. 3]

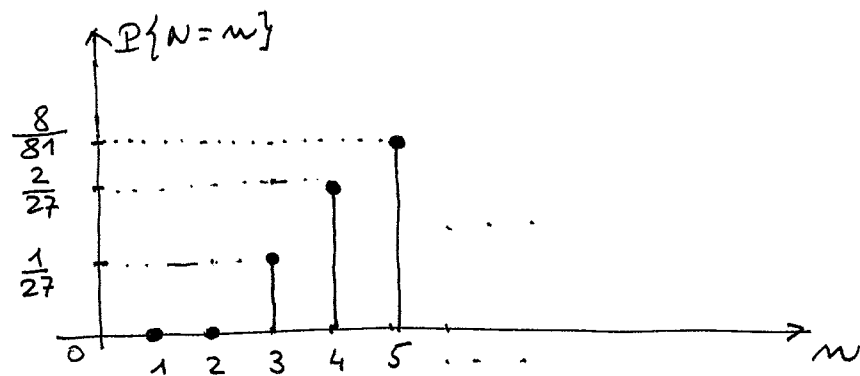
È evidente che sono necessarie almeno 3 misure per ottenere il risultato cercato, quindi: $P\{N=1\}=P\{N=2\}=0$.
 Usando la formula trovata si ha poi:

$$n=3 \rightarrow P\{N=3\} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 1}{16} \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{1}{27} \approx 3,7 \cdot 10^{-2}$$

$$n=4 \rightarrow P\{N=4\} = \frac{1 \cdot 3 \cdot 2}{16} \left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{2}{27} \approx 7,4 \cdot 10^{-2}$$

$$n=5 \rightarrow P\{N=5\} = \frac{1}{16} \cdot 4 \cdot 3 \left(\frac{2}{3}\right)^5 = \frac{8}{81} \approx 9,9 \cdot 10^{-2}$$

...



{ Per completezza e per dare un'idea dell'andamento totale della distribuzione si riportiamo circa 30 valori calcolati con un foglio Excel:

