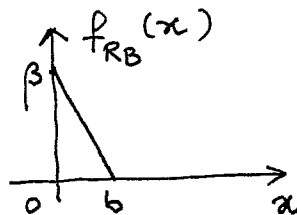
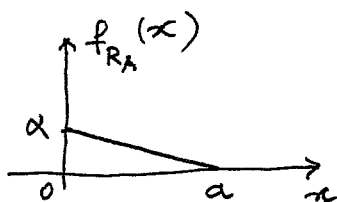


Esame di TEORIA DEI SEGNALE

Quesito A31

Una ditta di spedizioni recapita quotidianamente un plico alla vostra ditta. Gli addetti alla consegna sono il sig. A e il sig. B che si alternano casualmente e indipendentemente ma con probabilità diverse $p_A = P(A)$ e $p_B = P(B)$. La consegna dovrebbe avvenire alle ore 10.00 ma gli addetti si presentano con un ritardo che per ciascuno è una v.a. R_A e R_B , rispettivamente, con densità di probabilità come in figura.



- Si trovi il valor medio delle v.a. R_A , R_B (ritardi dei rispettivi addetti) e della v.a. $R = \{\text{ritardo di consegna in un giorno qualunque}\}$.
- Un certo giorno vi avvertono che il corriere è appena arrivato e voi valutate che in quel momento le probabilità che l'addetto arrivato sia A e quella che l'addetto sia B sono uguali: che ore sono? (Si esprima tale ora trovando il ritardo r e sommandolo alle ore 10.00).
- Successivamente allo svolgimento del punto precedente si trovi il valore numerico di r (in minuti e decimali) sostituendo i seguenti valori nell'espressione trovata:
 $a = 25$ min, $b = 15$ min e i valori di p_A e p_B ottenuti sapendo che p_B è il doppio di p_A (ossia che l'addetto B si presenti con probabilità doppia rispetto ad A);
- Si trovi la densità di probabilità $f_R(x)$ della v.a. R e se ne tracci un grafico accurato di con i dati numerici sopra trovati (si ricavino anche i necessari valori di α e β (vedi figura sopra).

Quesito A31 - (soluzione)

Il valor medio di R_A è (dalla definizione):

$$E\{R_A\} = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f_{R_A}(x) dx$$

dove l'espressione da sostituire a $f_{R_A}(x)$ si ricava dalla figura, da cui:

$$f_{R_A}(x) = -\frac{\alpha}{a}x + \alpha \quad \text{per } 0 < x < a \quad (\text{e zero altrove}).$$

La normalizzazione richiede: $\int_{-\infty}^{+\infty} f_{R_A}(x) dx = \frac{a \cdot \alpha}{2} = 1$, da cui $\alpha = \frac{2}{a}$, da cui ancora:

$$f_{R_A}(x) = \frac{2}{a} \left(1 - \frac{x}{a}\right) \quad \text{per } 0 < x < a \quad (\text{e zero altrove})$$

e analogamente, essendo $f_{R_B}(x)$ dello stesso tipo di $f_{R_A}(x)$:

$$f_{R_B}(x) = \frac{2}{b} \left(1 - \frac{x}{b}\right) \text{ per } 0 < x < b \text{ (e zero altrove).}$$

Quindi il valor medio di R_A si ricava da:

$$\begin{aligned} E\{R_A\} &= \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f_{R_A}(x) dx = \int_0^a x \cdot \frac{2}{a} \left(1 - \frac{x}{a}\right) dx = \frac{2}{a} \left\{ \left[\frac{1}{2} x^2 \right]_0^a - \left[\frac{1}{3} \frac{x^3}{3} \right]_0^a \right\} = \\ &= \frac{2}{a} \left(\frac{1}{2} a^2 - \frac{1}{3} a^3 \right) = \frac{a}{3} \end{aligned} \quad \text{e analogamente: } E\{R_B\} = \frac{b}{3}$$

Il valor medio di R si può ricavare dalla versione del teorema della probabilità totale per i valori medi [Vedi testo Bonomi; Ferrari, p. 248, Eq. (8.5)]:

$$\begin{aligned} E\{R\} &= E\{R|A\}P(A) + E\{R|B\}P(B) = E\{R_A\}P(A) + E\{R_B\}P(B) = \\ &= \frac{1}{3}(a p_A + b p_B) \end{aligned}$$

La probabilità che l'addetto arrivato alle ore 10.00 + r sia A oppure B si scrive, nei due casi, per mezzo della formula di Bayes mista:

$$P\{A|R=r\} = \frac{f_R(r|A) \cdot P(A)}{f_R(r)}$$

$$P\{B|R=r\} = \frac{f_R(r|B) \cdot P(B)}{f_R(r)}$$

Il quesito richiede di ricavare il valore di r

dall'uguaglianza: $P\{A|R=r\} = P\{B|R=r\}$ ossia da:

$$\frac{f_R(r|A) \cdot P(A)}{f_R(r)} = \frac{f_R(r|B) \cdot P(B)}{f_R(r)}$$

da cui:

$$f_{RA}(x) \cdot \phi_A = f_{RB}(x) \cdot \phi_B$$

essendo $f_R(x|A) = f_{RA}(x)$ e $f_R(x|B) = f_{RB}(x)$.

Quindi:

$$\frac{2}{a} \left(1 - \frac{x}{a}\right) \cdot \phi_A = \frac{2}{b} \left(1 - \frac{x}{b}\right) \cdot \phi_B$$

da cui si ricava:

$$\left[x = \frac{a^2 b \phi_B - a b^2 \phi_A}{a^2 \phi_B - b^2 \phi_A} = a b \cdot \frac{a \phi_B - b \phi_A}{a^2 \phi_B - b^2 \phi_A} \right] \quad (1)$$

- I valori di ϕ_A e ϕ_B da usare nella parte numerica si ricavano dall'indicazione: $\phi_B = 2 \cdot \phi_A$, dovendo essere:

$$\phi_A + \phi_B = 1 = \phi_A + 2\phi_A \quad \text{si ottiene: } \phi_A = \frac{1}{3} \text{ e } \phi_B = \frac{2}{3}.$$

Sostituendo in (1) i valori numerici indicati si ha:

$$\left[x = 25 \cdot 15 \cdot \frac{25 \cdot \frac{2}{3} - 15 \cdot \frac{1}{3}}{625 \cdot \frac{2}{3} - 225 \cdot \frac{1}{3}} = 12,8 \text{ min} \right]$$

Quindi l'ora di arrivo è $\approx 10:13$.

- Ancora per il teorema della probabilità totale si ha:

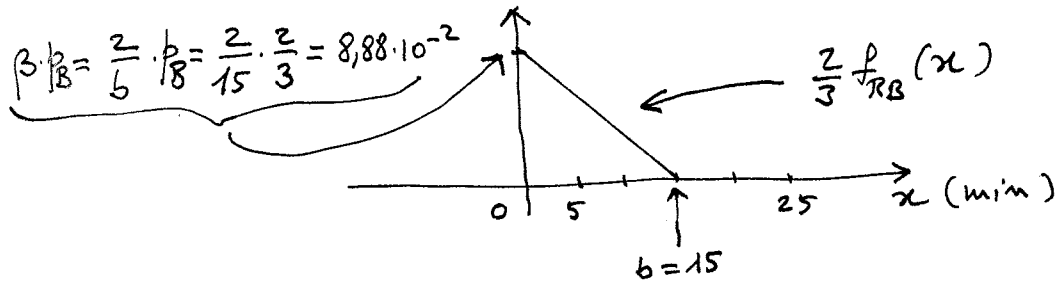
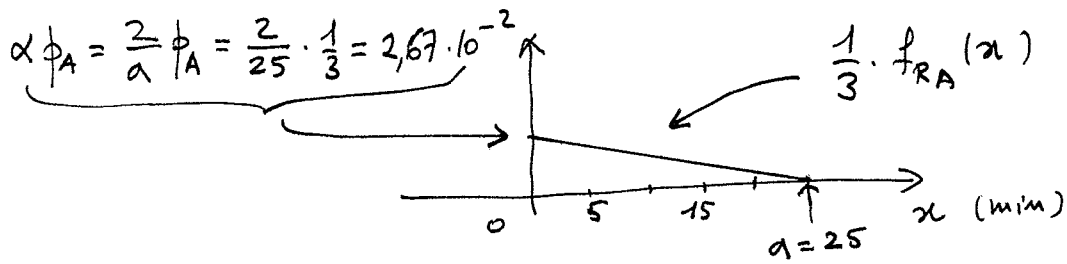
$$f_R(x) = f_R(x|A) \phi_A + f_R(x|B) \phi_B = f_{RA}(x) \cdot \phi_A + f_{RB}(x) \cdot \phi_B =$$

$$= \begin{cases} \frac{2}{a} \left(1 - \frac{x}{a}\right) \cdot \phi_A + \frac{2}{b} \left(1 - \frac{x}{b}\right) \phi_B & \text{per } 0 < x < b \\ \frac{2}{a} \left(1 - \frac{x}{a}\right) \cdot \phi_A & \text{per } b < x < a \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{25} \left(1 - \frac{x}{25}\right) + \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{15} \left(1 - \frac{x}{15}\right) & \text{per } 0 < x < 15 \\ \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{25} \left(1 - \frac{x}{25}\right) & \text{per } 15 < x < 25 \end{cases} \quad (2)$$

Il grafico di $f_R(x)$ si può ottenere dalla (2) o

direttamente per via grafica sommando $\frac{1}{3} \cdot f_{RA}(x)$ e $\frac{2}{3} \cdot f_{RB}(x)$:



e sommando:

